e-Tec Brasil
Escola Técnica Aberta do Brasil

Matemática Financeira

Roberto José Medeiros Junior

INSTITUTO FEDERAL
PARANÁ
Educação à Distância

Curitiba-PR
2011

Sumário

Palavra do professor-autor

Prezado Estudante,

O presente material tem como objetivo enriquecer o estudo acerca das atividades e práticas relativas à disciplina de Matemática Financeira, na modalidade de Educação a Distância, do Instituto Federal do Paraná (IFPR). O método de Ensino contempla, também, atividades autoinstrutivas e as supervisionadas, abrangendo conteúdos relevantes a área do Secretariado, apresentação diferenciada das propostas de atividades práticas aliadas ao caráter teórico-reflexivo das atividades.

Cada capítulo foi estruturado pensando em retomar conceitos elementares de Matemática importantes para o desenvolvimento da teoria e atividades autoinstrutivas. Estudaremos proporcionalidade (regra de três), percentagem, progressões, séries, sequências e uso de calculadoras simples.

Os tópicos apresentados estão divididos de modo a contemplar o "bê-á-bá" das Finanças e da Educação Financeira com foco nos conhecimentos matemáticos pertinentes e interdisciplinares. Em finanças pessoais, o profissional técnico em Secretariado terá clareza da aplicabilidade dos conhecimentos matemáticos à saúde financeira do dinheiro, das aplicações em curto, médio e longo prazo e de ações determinantes da empresa que faz parte.

O livro encontra-se dividido de modo didático, seguindo um critério de aprendizado rico de conhecimentos, porém de fácil assimilação. Observando uma evolução de conceitos e técnicas apresentadas gradativamente à maneira que se realizam as atividades autoinstrutivas e supervisionadas lançando mão aos recursos de acompanhamento pedagógico, entre eles o telefone (0800) e fóruns via web (tutoria). A intenção é valorizar cada ponto como se fosse um módulo condensado e relevante, visando levar você para um mundo de reflexão, reeducação financeira e aprendizado contínuo. Sentimentos que serão estimulados em cada aula com a presença (mesmo que virtual) do professor conferencista e professor web.

Desejamos muito sucesso e aprendizado!

Sincero abraço!
Equipe de EaD - IFPR.

Aula 1 - O contexto das finanças na história da matemática

No decorrer desta aula você irá aprender sobre o que são finanças e educação financeira, saberá também a razão de utilizar Matemática nesses procedimentos.

1.1 Dinheiro e Temporalidade

Figura 1.1 - Dinheiro e Temporalidade
Fonte: http://www.sxc.hu

Quando tratamos de dinheiro e temporalidade, alguns elementos básicos devem ser levados em consideração, tais como:

Inflação → Os preços não são os mesmos sempre;

Risco → Investimentos envolvem risco que geram perda ou ganho de dinheiro;

Incerteza → Não há como saber que tipo de investimento é mais rentável sem estudo prévio;

Utilidade → Se não é útil, deve ser adquirido?

Oportunidade → Sem dinheiro as oportunidades dizem adeus.

Figura 1.2 - Pré História
Fonte: http://professor-rogerio.blogspot.com

Figura 1.3 - Reinado
Fonte: http://fprina.wordpress.com

Figura 1.4 - Banqueiros
Fonte: http://allmirante.blogspot.com

A Matemática Financeira possui diversas aplicações no atual sistema econômico. A palavra FINANÇAS remete especificamente àquelas relações da matemática com o dinheiro tal e qual o concebemos nas diversas fases da História da humanidade.

Você sabia que existem várias passagens na Bíblia que tratam de finanças:
Finanças:
1 Cr. 29:12-14; 1Tm. 6:9-10).
Em suma, todo cristão, como filho de Deus, recebe coisas, inclusive o dinheiro, que deve ser utilizado de maneira correta, sensata e temente a Deus para a glória do nome dele. Temos que ser equilibrados, ganhando com práticas honestas e fugindo das práticas ilícitas. É lícito desfrutarmos dos benefícios que o dinheiro traz, mas não apegarmos à cobiça a qualquer custo para conseguir dinheiro. Podemos usar o dinheiro para dízimos, ofertas, no lar, no trabalho e em lazer. As pessoas devem evitar contrair dívidas fora do alcance, comprar sempre que possível à vista, fugir dos fiadores, pagar os impostos, e como patrão pagar justos salários. Além disso, deve haver economia doméstica, com liberdade moral e responsável, evitando conflitos, pois afinal o dinheiro é de uso do casal.
Fonte: www.discipuladosemfronteiras.com/contato.php acessado em 03/2009.

Muitas situações estão presentes no cotidiano das pessoas e tem ligação imediata com o dinheiro, seja o fato de ter um pouco de dinheiro, nada de dinheiro ou muito dinheiro. Em todas as situações ter educação financeira torna-se fator determinante da ascensão profissional e saúde financeira pessoal e empresarial.

Os financiamentos são os mais diversos e criativos. Essa "mania" é muito antiga, remete as relações de troca entre mercadorias que com o passar das eras e diferentes civilizações evoluíram naturalmente quando o Homem percebeu existir uma estreita relação entre o dinheiro e o tempo - "tempo é dinheiro". Processos de acumulação de capital e a desvalorização da moeda levariam intuitivamente a ideia de juros, pois se realizavam basicamente devido ao valor temporal do dinheiro.

Figura 1.5 - Tempo
Fonte: http://www.sxc.hu

1.2 Juros

O conceito de juros surgiu no momento em que o homem percebeu a existência de uma afinidade entre o dinheiro e o tempo. As situações de acúmulo de capital e desvalorização monetária davam a ideia de juros devido ao valor momentâneo do dinheiro (cada dia as diferentes moedas têm um valor). Algumas tábuas matemáticas se caracterizavam pela organização dos dados e textos relatavam o uso e a repartição de insumos agrícolas através de operações matemáticas.

Os sumérios, povos que habitaram o Oriente Médio, desenvolveram o mais antigo sistema numérico conhecido, registravam documentos em tábuas de argila. Essas tábuas retratavam documentos de empresas comerciais. Algumas eram utilizadas como ferramentas auxiliares nos assuntos relacionados ao sistema de peso e medida. Havia tábuas para a multiplicação, números quadrados, números cúbicos e exponenciais (ideia de função). As funções exponenciais estão diretamente ligadas aos cálculos de juros compostos e os juros simples à noção de função linear. Mais adiante veremos com mais detalhes essas relações.

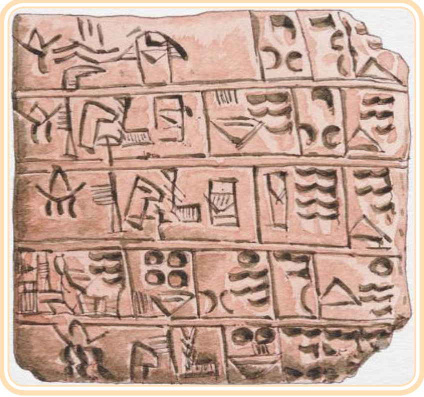


Figura 1.6 - Escrita dos sumérios
Fonte: http://www.mundovestibular.com.br

Consequentemente existe a relação da escrita antiga dos Sumérios com o nosso sistema de numeração, o sistema indo-arábico: (que tem esse nome devido aos hindus que o inventaram, e devido aos árabes, que o transmitiram para a Europa Ocidental).

Figura 1.7 - Hindu
Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br

E os juros? Sempre existiram?

Na época dos Sumérios, os juros eram pagos pelo uso de sementes e de outros bens emprestados. Os agricultores realizavam transações comerciais onde adquiriam sementes para efetivarem suas plantações. Após a colheita, os agricultores realizavam o pagamento através de sementes com a seguida quantidade proveniente dos juros do empréstimo. A forma de pagamento dos juros foi modificada para suprir as exigências atuais, no caso dos agricultores, claro que o pagamento era feito na próxima colheita. A relação tempo/juros foi se ajustando de acordo com a necessidade de cada época. Atualmente, nas transações de empréstimos, o tempo é preestabelecido pelas partes negociantes.

Vale observar que os juros sempre sofreram com as intempéries. Naquela época, muito mais relacionadas com o clima, época de plantio e colheita. Atualmente, além disso, os juros sofrem alterações de base por conta das políticas monetárias, do banco central, ou seja, dependem da vontade política/econômica do Ministro da Fazenda e das decisões do COPOM (Comitê de Política Monetária do Banco Central) e de políticas econômicas nacionais e internacionais, de diferentes gestões, período de crises financeiras, alta e baixa da taxa de desemprego, da instalação de indústrias e de índices de desenvolvimento humano (IDH).

Figura 1.8 - Índices
Fonte: http://www.sxc.hu

Atualmente se utiliza o financiamento para as mais diversas situações do universo capitalista, porque o "ter" é a engrenagem da máquina financeira mundial. A compra da casa própria, carro, moto, realizações pessoais (empréstimos), compras a crediário ou com cartão de crédito, aplicações financeiras, investimentos em bolsa de valores, entre outras situações financeiras que dependem do quanto se ganha e de quanto está disposto a arriscar em financiamentos a curto, médio e longo prazo. Em resumo, todas as movimentações financeiras são baseadas na estipulação prévia de taxas de juros e envolvem o tempo para quitar a dívida.

Ao realizarmos um empréstimo a forma de pagamento é feita através de prestações mensais acrescidas de juros, isto é, o valor de quitação do empréstimo é superior ao valor inicial do empréstimo. A essa diferença damos o nome de juros, ou seja, o bem adquirido tem valor agregado maior do que se fosse comprado à vista (em parcela única). Uma questão pertinente: compras parceladas ou guardar o dinheiro para comprar à vista? Esse é o grande objetivo da formação para a Educação Financeira, nossa meta para este curso.

Resumo

Aprendemos nessa aula o que são finanças e um pouco sobre a nova lei que regulamenta a inserção da Educação Financeira nos currículos escolares, além de qual a razão de utilizar conceitos de Matemática nos procedimentos financeiros.

Aula 2 - Relações algébricas: razões e proporções

Na aula de hoje, revisaremos proporcionalidade (regra de três) e uso da calculadora simples. Nosso objetivo é propiciar maior entendimento e exploração de conceitos matemáticos fundamentais a dedução de relações algébricas (fórmulas) úteis aos cálculos de Matemática Financeira.

A noção de relação algébrica em matemática financeira é importante para representar de modo geral as relações que estabeleceremos entre o dinheiro, os juros e o tempo. De modo geral atribuímos letras (variáveis) para representar o dinheiro gasto, o financiamento, investimento, tempo de aplicação, juros mensais, entre outros. Sendo assim é muito provável que para cada autor que consultar encontrará diferentes letras para representar as variáveis citadas.

Uma relação bastante útil em matemática financeira é a proporcionalidade, frequentemente conhecida como "regra de três". Sua utilidade vai desde o cálculo de porcentagens até a transformação de unidades de tempo e valor monetário. Primeiramente vamos nos ater a noção de razão e proporção em Matemática.

2.1 Razões e proporções

2.1.1 Razão

Existem várias maneiras de comparar duas grandezas, por exemplo, quando se escreve a > b (lê-se "a" maior do que "b") ou a < b ou ainda (lê-se "a" menor do que "b") e a = b (lê-se "a" igual ao "b"), estamos comparando as grandezas **a** e **b**. Essa comparação pode ser feita através de uma razão entre as duas grandezas, isto é o quociente entre essas grandezas. Em resumo, uma razão é a representação da divisão entre dois valores "a" e "b".

Exemplo:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \xrightarrow{\text{é mesmo que}} a : b \xrightarrow{\text{é mesmo que}} a/b$$

I. A razão entre 6 e 3 é expressa por 6:3 ou 6/3 . Se pretendemos comparar a e b determino a razão a : b ou a/b, Mas se dissermos que a razão entre elas é 2, estamos afirmando que "a" é duas vezes maior que "b", ou seja, o dobro.

2.1.2 Aplicações

Entre as aplicações práticas de razões especiais, as mais comuns, são:

a) Velocidade média

A velocidade média em geral é uma grandeza obtida pela razão entre uma distância percorrida e um tempo gasto neste percurso.

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto no percurso}}$$

Exemplo:

Figura 2.1 - Estrada
Fonte: http://www.sxc.hu

II. Suponhamos que um carro percorreu 120 km em 2 horas. A velocidade média do carro nesse percurso será calculada a partir da razão:

$$V_{\text{média}} = \frac{120\text{Km}}{2\text{h}} = 60\text{Km/h}$$

O que significa que, em 1 hora o carro percorreu 60 km.

b) Escala

Escala é a comparação (através da razão) entre o comprimento observado no desenho (mapa, por exemplo) e o comprimento real correspondente, ambos na mesma unidade de medida.

$$\text{Escala} = \frac{\text{comprimeto do desenho}}{\text{comprimento real}}$$

Exemplo:

III. Em um mapa, um comprimento de 8 m está representado por 16 cm. Qual a escala usada para fazer esse mapa?

8 m = 800 cm.

$\text{Escala} = \frac{16\text{cm}}{800\text{cm}} = \frac{1}{50} =$ ou ainda escala 1 : 50, como é mais comum nos desenhos e mapas.

Isto significa que cada 1 cm medido no desenho é igual 50 cm no tamanho no real.

c) Densidade Demográfica

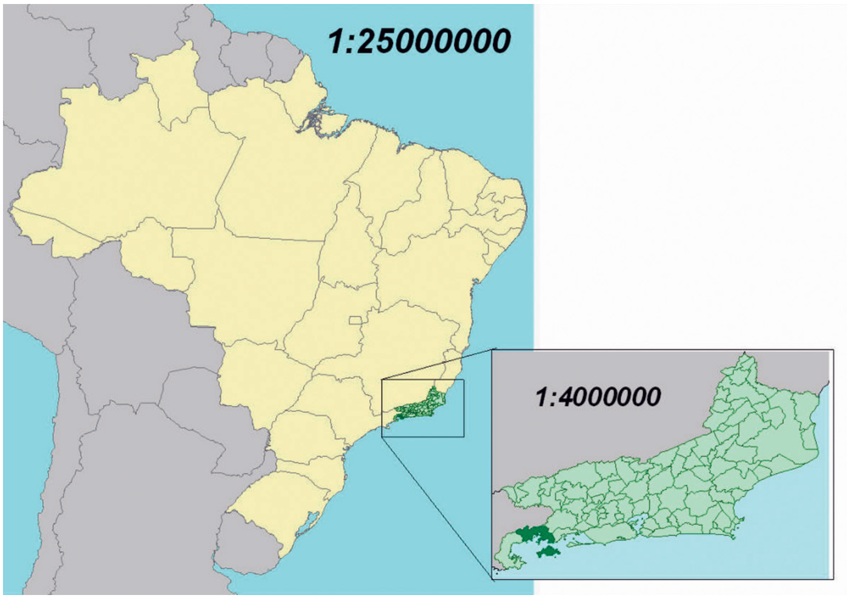


Figura 2.2 - Densidade demográfica
Fonte: http://www.grupoescolar.com

O cálculo da densidade demográfica também chamada de população relativa de uma região, também é considerado uma aplicação de razão entre duas grandezas. Ela expressa a relação entre o número de habitantes e a área em uma região.

$$\text{Densidade demográfica} = \frac{\text{número de habitantes}}{\text{área total do território}}$$

Exemplo:

IV. Um município ocupa a área de 100.000 km^2 E, de acordo com o censo realizado, tem população aproximada de 5.000 habitantes. A densidade demográfica desse município é obtida assim:

$$\text{Densidade demográfica} = \frac{100.000 \text{ hab}}{5.000 \text{ km}^2} = 20\text{hab/km}^2$$

Isto significa que para cada 1 quilômetro quadrado, esse município tem 20 habitantes.

Para o nosso caso mais específico de finanças um exemplo de razão é relacionar a noção de razão com a transformação de frações em números decimais (com vírgula), vejamos alguns exemplos:

A razão 20 : 2, ou $\frac{20}{2}$ é igual à 10. A razão de 20 para 2 é 10, ou seja vinte é dez vezes maior que dois.

A razão 12:3 ou 12/3 é igual a quatro, ou seja doze é quatro vezes maior que três.

A razão $\frac{4}{6} : \frac{4}{6}$ é igual a 1. A razão de 4/6 para 4/6 é 1 (um inteiro ou 100%).

A razão facilita o entendimento de alguns problemas, até mesmo financeiros, do dia a dia. É o que veremos a seguir.

Exemplo prático:

Figura 2.3 - Preço
Fonte: http://2.bp.blogspot.com

A informação de que um produto que queremos comprar aumentou em R$ 25,00, como sabermos se foi um aumento significativo? Como sabermos se vale a pena comprar naquele momento ou esperar por uma promoção?

De modo analítico podemos comparar o valor do aumento com o valor do produto, para analisar a razão do aumento, isto é, o quanto aumentou em relação ao valor inicial.

Se o produto valia R$1.000,00, devemos achar a razão de 25 para 1.000. Esta razão é igual à 0,025, ou 5%. Sabemos que o produto aumentou em 2,5%. Porém se o produto valia R$100,00 teremos a razão de 25 para 100, isto é, o produto aumentou em 25%.

Com este modo de analisar os valores podemos tomar a decisão, financeira, de comprar ou não o produto. Vale ressaltar que, neste caso, não estamos levando em consideração outros fatores que ajudariam na decisão, como os juros, riscos e o chamado custo de oportunidade do capital. Estes fatores serão considerados mais adiante na disciplina.

As situações apresentadas destacam a linguagem mais utilizada nas finanças como um todo: a porcentagem. Este é assunto das nossas próximas aulas.

Saiba mais

Percentagem x Porcentagem

"É opcional dizer percentagem (do latim *per centum*) ou porcentagem (em razão da locução 'por cento'). Mas só se diz percentual. Com as expressões que indicam porcentagens o verbo pode ficar no plural ou no singular, conforme o caso, já que a concordância pode ser feita com o número percentual ou com o substantivo a que ele se refere."

Por Maria Tereza de Queiroz Piacentini.

Fonte: http://kplus.cosmo.com.br/materia.asp?co=49&rv=Gramatica, acessado em setembro de 2009.

Leis e preço à vista

"O artigo 31 do Código de Defesa do Consumidor determina que os produtos e serviços ofertados ou apresentados ao consumidor devem exibir, entre outras características, o seu preço. E esse preço é o de a vista. Para o caso de pagamento parcelado, o art. 52 da mesma lei prevê como obrigação do comerciante informar ao consumidor, além do preço à vista, o montante dos juros cobrados, os acréscimos legalmente previstos (como taxa de abertura de crédito, por exemplo) e o valor total que será pago parceladamente."

Fonte:http://www.diarioon.com.br/arquivo/4054/colunas/coluna-865.htm, acessado em julho de 2009.

Resumo

Durante a aula dois, revisamos proporcionalidade direta (a conhecida regra de três simples) e uso da calculadora simples. Nosso objetivo maior foi propiciar amplo entendimento e exploração de conceitos matemáticos fundamentais (a famigerada matemática básica), a dedução de relações algébricas (expressões e fórmulas) úteis aos cálculos e o entendimento dos formulários de Matemática Financeira.

Aula 3 - Revendo o conceito de potencialização

Nesta aula, você retomará o significado de algumas propriedades da potenciação e porcentagem, ou seja, conhecerá a importância da palavra "por cento" e também as aplicações nas questões financeiras.

3.1 Potenciação

A ideia de potenciação pode ser explicada, quando usamos a seguinte situação no lançamento de dados:

Figura 3.1 - Dados
Fonte: http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1085831

Quando lançamos dois dados consecutivos, podemos obter os seguintes resultados:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Assim, temos 36 resultados possíveis nesses lançamentos.

Entretanto, podemos chegar a essa conclusão utilizando outro raciocínio, que seria a multiplicação das possibilidades de resultado para cada um dos dados:

1º dado ↓	2º dado ↓	
6 possibilidades	6 possibilidades	⟶ $6 \times 6 = 6^2 = 36$

Faça da mesma maneira lançando três dados consecutivos:

1º dado ↓	2º dado ↓	3º dado ↓	
6 possibilidades	6 possibilidades	6 possibilidades	⟶ 6 x 6 x 6 = 63 = 216

Generalizando, com **n** lançamentos consecutivos:

1º dado ↓	2º dado ↓	3º dado ↓	(...) no dado ↓	
6 possibilidades	6 possibilidades	6 possibilidades	6 possibilidades	6 x 6 x 6 x (...) = 6n

Logo percebemos que esta situação representa uma potência, ou seja, um caso particular da multiplicação. Desta maneira podemos definir potência como um produto de fatores iguais.

$$\boxed{a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot (\ldots)\, a}$$

Onde: "a" é a base

"n" é o expoente, o resultado é a potência.

Por exemplo:

$(-2)^2 = (-2).(-2) = 4$

$(-3)^3 = (-3).\ (-3).\ (-3) = -27$

$4^4 = 4.4.4.4 = 256$

$5^5 = 5.5.5.5.5 = 3125$

Observação:

Pela observação dos exemplos anteriores temos as seguintes conclusões:

$$(+)^{par} = + \qquad (-)^{par} = +$$

$$(+)^{ímpar} = + \qquad (-)^{ímpar} = -$$

3.1.1 Casos particulares

Considere a seguinte sequência de potência de base 2:

$2^4 = 16$

$\downarrow :2 \rightarrow 2^3 = 8$

$\downarrow :2 \rightarrow 2^2 = 4$

$\downarrow :2 \rightarrow 2^1 = 2$

$\downarrow :2 \rightarrow 2^{-1} = \frac{2}{2}$

$\downarrow :2 \rightarrow 2^{-2} = \frac{2}{4}$

$\downarrow :2 \rightarrow 2^{-3} = \frac{1}{8}$

$\downarrow :2 \rightarrow 2^{-4} = \frac{1}{16} \ldots$

Com estes resultados concluímos que:

1. Toda potência de expoente 1 é igual à base

$$a^1 = a$$

2. Toda potência de expoente zero é igual a 1

$$a^0 = 1$$

3. Toda potência de expoente negativo é igual ao inverso da potência de expoente positivo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ sendo } a \neq 0$$

3.1.2 Propriedades das potências:

As propriedades das potências utilizadas para simplificar os cálculos aritméticos são:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

- Verificação das propriedades

$$a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^5 = a^{2+3}$$

$$a^5 : a^3 = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2 = a^{5-3}$$

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^6 = a^{2 \cdot 3}$$

A seguir temos alguns exemplos dos casos particulares e das propriedades das potências.

a) $1^0 = 1$

b) $5^1 = 5$

c) $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

d) $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$

e) $2^3 \div 2^2 = 2^{3-2} = 2^1 = 2$

f) $(2^2)^3 = 2^6 = 64$

Resumo

Nesta aula, retomamos o significado da potenciação por meio de exemplos práticos relacionados à probabilidade e estatística. Tais exemplos serão úteis ao entendimento que se tem sobre as fórmulas as quais serão vistas mais adiante.

Aula 4 - Porcentagem

O objetivo desta aula é rever conceitos de porcentagem, ou seja, a importância da expressão "por cento" e as aplicações cotidianas nas questões financeiras.

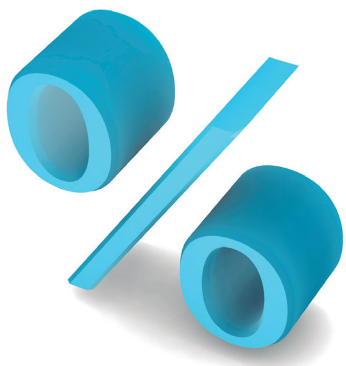


Figura 4.1 - Porcentagem
Fonte: http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=949760

Pare e observe nas lojas os encartes, e na internet a quantidade de vezes que a representação % (por cento) está presente na comunicação das mais diversas empresas e órgãos públicos. Trata-se de uma linguagem amplamente difundida, e é senso comum entre a população de que se trata de um modo de comunicação com vistas em representar a parte de um todo de 100 unidades. Dada essa importância, vejamos alguns exemplos da representação em porcentagem versus a representação na forma de razão e o equivalente em decimal:

Tabela 4.1 - Representação

Representação	Exemplo de situação usual
50%	"UNE quer que 50% dos recursos do Fundo Social sejam investidos em educação".
½	"Emagreça 1/2 kg por dia comendo sanduíche".
0,5	"Oferta: Lapiseira Pentel Técnica 0,5mm Preta - P205"
Metade	"Governo Federal reduziu pela metade o dinheiro destinado ao sistema penitenciário".

Fonte: Elaborado pelo autor

Note que a tabela traz diferentes situações que são representadas pelo mesmo conceito de "metade". Porém cada situação exposta pede uma diferente representação, por exemplo, não seria adequado dizer: "emagreça 50% de um quilograma por dia". Para o nosso caso específico utilizaremos amplamente a notação de porcentagem, por estar intimamente relacionada com o sistema monetário que está definido como número decimal posicional.

Toda razão da forma a/b na qual o denominador b = 100, é chamada taxa de porcentagem ou simplesmente porcentagem ou ainda percentagem.

Historicamente, a expressão **por cento** aparece nas principais obras de aritmética de autores italianos do século XV. O símbolo % surgiu como uma abreviatura da palavra cento utilizada nas operações mercantis.

Para indicar um índice de 10 por cento, escrevemos 10% e isto significa que em cada 100 unidades de algo, tomaremos 10 unidades.

O cálculo de 10% de 80, por exemplo, pode ser obtido como o produto de 10% por 80, isto é: 10%.80 = 10/100.80 = 800 / 100 = 8.

Situações mais elementares, como a citada anteriormente, podem ser resolvidas "de cabeça" (cálculo mental). Imagine que os 80 citados são na verdade o valor da conta de um jantar em família; sobre esse valor vamos acrescentar a taxa de serviço de garçom que é de 10% sobre o consumo total. Sendo assim, basta dividir por 10 o valor da conta, resultando em 0,8, ou melhor, em 0,80 centavos de Real e somar este resultado ao total consumido:

R$ 0,80 + R$ 80,00 = R$ 80,80.

Em geral, para indicar um índice de M por cento, escrevemos M% e para calcular M% de um número N, realizamos o produto:

Produto = M%.N = M.N / 100

Exemplo 1.

Um fichário tem 25 fichas numeradas, sendo que 52% dessas fichas estão etiquetadas com um número par. Quantas fichas têm a etiqueta com número par? Quantas fichas têm a etiqueta com número ímpar?

Solução:
Etiquetas Pares = 52% de 25 fichas = 52% . 25 = 52.25 / 100 = 13. O restante, (100% - 52% = 48% são de fichas número ímpar)

Poderíamos ainda calcular o valor de 50% e acrescentar 2% (1% + 1%), vejamos: (metade de 25) 50% de 25 = 12,5 + (a centésima parte de 25) 1% de 25 + 1% de 25 = 0,5.
A soma 12,5 + 0,5 = 13.

Nesse fichário, há 13 fichas etiquetadas com número par e 12 fichas com número ímpar.

Exemplo 2.

Num torneio de basquete, uma determinada seleção disputou quatro partidas na primeira fase e venceu três. Qual a porcentagem de vitórias obtida por essa seleção nessa fase?

Solução:

Vamos indicar por **X%** o número que representa essa porcentagem. Esse problema pode ser expresso da seguinte forma: X% de 4 = 3

Assim temos:

$(X/100)\ 4 = 3$
$4X/100 = 3$
$4X = 300$
$X = 75$
Ou ainda poderíamos utilizar o conceito de proporção: ¾ = 0,75, ou seja, na primeira fase a porcentagem de vitórias foi de 75%.

Exemplo 3.

Numa indústria há 255 funcionárias. Esse número corresponde a 42,5% do total de empregados da indústria. Quantas pessoas trabalham nesse local? Quantos funcionários trabalham nessa indústria?

Solução:
Vamos indicar por X o número total de empregados dessa indústria. Esse problema pode ser representado por: 42,5% de X = 255

Assim temos:

42,5% . X = 255
42,5 / 100.X = 255
42,5.X / 100 = 255
42,5.X = 25500
425.X = 255000
X = 255000/425 = 600

Nessa indústria trabalham 600 pessoas, sendo que há 345 homens (600 – 255).

Exemplo 4.

Ao comprar uma mercadoria, obtive um desconto de 8% sobre o preço marcado na etiqueta. Pagou-se R$ 690,00 pela mercadoria. Qual o preço original da mercadoria?

Solução:
Seja X o preço original da mercadoria. Se obtive 8% de desconto sobre o preço da etiqueta, o preço que paguei representa 100%-8% = 92% do preço original e isto significa que 92% de X = 690

Assim temos:

92% . X = 690
92/100.X = 690
92.X / 100 = 690
92.X = 69000
X = 69000 / 92 = 750
O preço original da mercadoria era de R$ 750,00.

Importante!!

Abreviaturas empregadas na notação das taxas:

Abreviatura	Significado
a.d.	ao dia
a.m.	ao mês
a.b.	ao bimestre
a.t.	ao trimestre
a.q.	ao quadrimestre
a.s.	ao semestre
a.a.	ao ano

Ano civil ou exato: formado por 365 ou 366 dias (ano bissexto);

Ano comercial: formado por 360 dias.

Resumo

Na aula quatro, vimos conceitos de porcentagem, ou seja, a importância do "por cento" e das aplicações cotidianas nas questões financeiras utilizando apenas o denominador 100 nas razões do tipo a/b (com b sempre igual a 100).

Anotações

Aula 5 - Taxas e coeficientes

Nesta aula, você compreenderá o significado das taxas e coeficientes.

5.1 Taxas

As taxas se referem aos valores expressos preferencialmente em porcentagem enquanto que os coeficientes são estritamente numéricos (números decimais). Vejamos alguns exemplos:

> "A taxa básica de juros, Selic, vai continuar em 8,75% ao ano nos próximos 45 dias. O índice vigora nesse patamar desde 22 de julho, quando o Comitê de Política Monetária (Copom) do Banco Central (BC) estancou o processo de afrouxamento gradativo da política monetária, iniciado em janeiro. As informações são da Agência Brasil. Em janeiro, a Selic estava em 13,75%. Na reunião de hoje (21), a taxa foi mantida sem possibilidade de revisão até a próxima reunião do colegiado, marcada para 8 e 9 de dezembro."
>
> Fonte: http://diariodovale.uol.com.br/noticias/7,11719.html, acessado em 09/09.

Note que a taxa básica de juros, a chamada SELIC (Sistema Especial de Liquidação e Custódia) estará sempre atrelada a um valor decimal expresso em porcentagem. A taxa é fixada pelo COPOM (Comitê de Política Monetária), órgão representado pelo presidente e diretores do Banco Central. Durante as reuniões, eles decidem se abaixam, se aumentam ou se mantém a Selic. A decisão deles é baseada em cumprir a meta de inflação do Brasil. Quanto maior a taxa Selic, menor é a inflação. Se a taxa básica de juros cai, a inflação sobe.

A taxa Selic é básica porque os títulos do governo, ou seja, os fundos de onde as pessoas podem investir no governo, e de onde os bancos ou outras grandes instituições podem pegar dinheiro emprestado se baseiam nessa taxa, tanto para pagar os rendimentos dos investimentos no governo, quanto para cobrar os juros de quem pegou emprestado dos cofres públicos.

A Selic é a taxa base usada para fazer os cálculos financeiros. Isso causa um efeito cascata em todas as operações tributárias, de empréstimos, de financiamentos, de pagamentos, entre outros. Se a Selic é alta, todos os juros do País são altos.

O efeito é imediato: quando os juros estão em alta, há menos gente comprando, porque o dinheiro é mais gasto com o pagamento de juros e empréstimos que consumindo. O mercado, então, é obrigado a baixar os preços na tentativa de estimular as vendas.

No *site* da receita federal você encontra as taxas Selic desde o ano de 1995. http://www.receita.fazenda.gov.br/pagamentos/jrselic.htm
É uma ótima fonte de consulta das diferentes ações desta ou daquela equipe financeira desde o governo de FHC até o governo Lula.

5.1.1 Tipos de taxas

a) **Taxa Nominal:** é quando o período de formação e incorporação dos juros ao Capital não coincide com aquele a que a taxa está referida.

Exemplos:

1200% ao ano com capitalização mensal.
450% ao semestre com capitalização mensal.
300% ao ano com capitalização trimestral.

b) **Taxa Efetiva:** é quando o período de formação e incorporação dos juros ao Capital coincide com aquele a que a taxa está referida.

Exemplos:

120% ao mês com capitalização mensal.
450% ao semestre com capitalização semestral.
1300% ao ano com capitalização anual.

c) **Taxa Real:** é a taxa efetiva corrigida pela taxa inflacionária do período da operação.

5.1.2 Pagamento do Imposto de Renda Pessoa Física: um exemplo de taxa a pagar.

Figura 5.1 - Imposto de Renda
Fonte: http://www.dicastotal.com

O pagamento do saldo do imposto pode ser parcelado em até 8 (oito) quotas, mensais e sucessivas, desde que cada quota não seja inferior a R$ 50,00. Está dispensado o recolhimento do imposto de valor inferior a R$ 10,00.

O imposto de valor inferior a R$ 100,00 deve ser recolhido em quota única, ou seja, sobre este não incidem juros, nem cobrança de taxas adicionais.

A 2ª quota, com vencimento no mês seguinte, sofre acréscimo de 1%. Ao valor das demais quotas devem ser **acrescidos juros equivalentes à taxa referencial (TR) do Sistema Especial de Liquidação e de Custódia (Selic).**

Quando pagas dentro do prazo, o valor das quotas será obtido da seguinte maneira:

Tabela 5.1 – Valor das quotas

Vencimento das Quotas e Valor dos Juros		
Quota	**Vencimento**	**Valor dos Juros**
1ª ou única	30/04/2009	-
2ª	29/05/2009	1% sobre o valor da quota
3ª	30/06/2009	Taxa Selic de maio/2009 + 1%, sobre o valor da quota
4ª	31/07/2009	Taxa Selic maio a junho/2009 + 1%, sobre o valor da quota
5ª	31/08/2009	Taxa Selic maio a julho/2009 + 1%, sobre o valor da quota
6ª	30/09/2009	Taxa Selic maio a agosto/2009 + 1%, sobre o valor da quota
7ª	30/10/2009	Taxa Selic maio a setembro/2009 + 1%, sobre o valor da quota
8ª	30/11/2009	Taxa Selic maio a outubro/2009 + 1%, sobre o valor da quota.

Fonte: http://www.receita.gov.br/, acessado em 09/09.

Já os coeficientes dizem respeito a valores independentes da representação em porcentagem, os valores passam a ser absolutos. Ou seja, se as taxas são expressas em grupos de 100 partes (por cento), os coeficientes servem para qualquer quantidade de dados numéricos e ajudam a representar intervalos, variações de máximo e mínimo, de correlação com tabelas pré-estabelecidas.

Vejamos algumas situações onde aparecem os coeficientes em finanças:

"Os coeficientes de mortalidade infantil no Paraná passaram de 56,35/1000 nascidos vivos em 1979 para 15,37/1000 nascidos vivos em 2004. Em número absoluto de óbitos, em 1979 foram 11.469 óbitos, e em 2004 foram 2.443 óbitos infantis."

Fonte: http://www.saude.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=2474, acessado em 09/09.

"O Brasil, tal como o Estado de São Paulo, apresentou também redução da mortalidade infantil durante esse período, embora o indicador do País tenha sido sempre bem superior ao do Estado. Enquanto, por exemplo, o coeficiente de mortalidade infantil brasileiro é estimado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) em 116 no ano de 1965, o coeficiente paulista, para o mesmo ano, é de 73."

Fonte:http://www.cve.saude.sp.gov.br/agencia/bepa69_gais.htm, acessado em 09/09.

Note que o coeficiente de mortalidade nos permite comparar com valores absolutos a mortalidade infantil no Paraná em comparação com o coeficiente de São Paulo.

Resumo

Nesta aula vimos três tipos de taxas: a taxa nominal, a taxa efetiva e a taxa real. Na sequência veremos que a transformação de taxas será bastante útil nos cálculos que envolvem capitalização composta, dado que, por ser juros sobre juros, teremos valores apresentados com mais de uma casa decimal. Atenção especial aos arredondamentos!

Anotações

Aula 6 - Juros e aplicações financeiras

Na aula de hoje faremos uma introdução aos Juros, em especial o significado dos juros como linguagem própria para representar as aplicações de capitalização na Matemática Financeira.

6.1 Juros? E os juros?

Os juros são representados em taxas (por cento), muitas vezes prefixadas por alguma política financeira ou índice predefinido pelo governo. O importante é que ambas (taxas e coeficientes) são modos de expressar os índices que determinada gestão ou diretoria utiliza para controlar e reajustar preços e demais aplicações financeiras.

E quando aparecem anúncios sedutores de prestações sem juros?

Figura 6.1 - Sem juros
Fonte: http://personaleasy.com

É possível vender com parcelas a perder de vista pelo cartão de crédito, e sem cobrança de nenhum centavo de juros?

A maioria dos lojistas sabem que determinado produto vendido é via de regra parcelado, então se ele trabalha na política do "n vezes sem juros", os juros serão embutidos juntamente com a comissão da administradora do cartão, por isso sempre que o pagamento é “à vista” a tentativa do cliente é conseguir um desconto maior, mas nem sempre consegue um desconto maior do que 10%.

Sendo assim, de fato, as lojas preveem a ação do cliente acrescentando juros, seja da operadora de cartões ou da margem de lucro determinada pela empresa. É da saúde financeira, dos lucros, que as empresas sobrevivem. Não há empresa (exceto as filantrópicas) que não visem o lucro como processo final das operações financeiras.

Visto por este prisma os juros são necessários para que as empresas tenham lucro nas operações de empréstimo, por exemplo. Emprestar dinheiro e cobrar por isso é bem lucrativo. Do outro lado aquele que recebe o empréstimo também se beneficia, pois consegue efetivar, finalizar o que necessitava e que não conseguia por falta de dinheiro e crédito.

Frequentemente ouve-se falar que os bancos e banqueiros são "maus" e oportunistas, algo como classificar os bancos como os vilões das operações de crédito, porém como veremos nas aulas seguintes, grande parte do que veremos são cálculos de juros (simples e compostos) relacionados com o quanto é emprestado, em que prazo e o mais importante: qual é a taxa de juros contratada?

6.2 Algumas definições usuais

"Juro é o valor que se paga pelo uso de dinheiro que se toma emprestado", refere-se ao quanto será acrescentado à parcela de compra para cobrir as despesas financeiras, que por vezes é um das partes do lucro.

"Juro é o dinheiro produzido quando o capital é investido", refere-se à rentabilidade de fundos de investimento. Por exemplo, a poupança, títulos de capitalização, investimentos de alto e baixo risco.

Na visão do especialista Sobrinho (2000), "juro é a remuneração do capital emprestado, podendo ser entendido, de forma simplificada, como sendo o aluguel pago pelo uso do dinheiro".

Os juros podem ser capitalizados segundo os regimes de **Capitalização Simples ou Juros Simples e Capitalização Composta ou Juros Compostos**. Cada uma dessas capitalizações será detalhada nas aulas seguintes.

Os juros podem ajudar (crescimento do patrimônio) ou atrapalhar (queda da qualidade de vida e do patrimônio); portanto dependendo de onde se faz um empréstimo pode-se resolver ou criar outro problema financeiro.

Escolher um Empréstimo Pessoal

Figura 6.2 - Bolsos vazios
Fonte: http://bastacomunicacao.wordpress.com

Algumas opções para crédito pessoal é o cheque especial e o empréstimo pessoal. A questão é complicada porque quem precisa de dinheiro para já, ou daquele produto a ser comprado com prazo de se perder de vista, parece ignorar a questão de que vai pagar juros por querer resolver o seu problema na hora. É o que chamamos de imediatismo financeiro.

Está provado que as taxas de juros destes empréstimos subiram mais nos últimos cinco anos. A questão principal é que estes tipos de juros sempre foram exorbitantes.

Analise o gráfico comparativo de juros cobrados sobre empréstimos pessoais e a taxa Selic:

Note que a opção cheque especial teve em todo o período (maio de 1999 a maio de 2004) a maior taxa de juros em % a.a, seguida do crédito especial comparada com a Selic.

É importante observar que quando a taxa Selic sobe - consequentemente - ela eleva também consigo as demais taxas de empréstimo do mercado financeiro. Não bastassem as exorbitantes taxas cobradas a quem faz empréstimos, os consumidores desta linha precisam ser mais cautelosos, pois, não sabemos como vai ficar a economia no futuro próximo. Não sabemos como os diferentes momentos de crise mundial vão afetar o Brasil e o mundo.

O que verdadeiramente sabemos é que não dá para contar com empréstimos para quitar dívidas de outros empréstimos já contraídos, definitivamente não é um bom negócio. **Se a pessoa gasta o que tem, não dá para vender o almoço para comprar a janta!**

Curiosidade

Figura 6.3 - Dinheiro
Fonte: http://www.sxc.hu

Alguns ditos famosos sobre dinheiro e finanças:

"O dinheiro não tem a mínima importância, desde que a gente tenha muito."(Truman Capote)

"Não tente pagar os seus impostos com um sorriso. Os fiscais preferem em dinheiro." (Autor desconhecido)

"Os jovens, hoje em dia, imaginam que o dinheiro é tudo e, quando ficam velhos, descobrem que é isso mesmo." (Oscar Wilde)

"Quando se trata de dinheiro, todos têm a mesma religião." (Voltaire)

"O dinheiro não nos traz necessariamente a felicidade. Uma pessoa que tem dez milhões de dólares não é mais feliz do que a que tem só nove milhões."(H. Brown)

"Dinheiro semeia dinheiro e o primeiro franco é, muitas vezes, mais difícil de ganhar que o segundo milhão." (Jean-Jacques Rousseau)

"Quando o dinheiro vai na frente, todos os caminhos se abrem."(William Shakespeare)

"Dinheiro no banco é como a pasta de dentes: fácil de tirar, mas muito difícil de voltar a pôr." (Aldo Cammarota)

"O dinheiro é melhor do que a pobreza, nem que seja por razões financeiras." (Woody Allen)

"Quem não tem dinheiro, meios e paz, carece de três bons amigos."(William Shakespeare)

"O dinheiro não pode comprar a felicidade, mas pode, com certeza, ajudar-nos a procurá-la nos melhores lugares." (David Biggs)

"Nada estabelece limites tão rígidos à liberdade de uma pessoa quanto à falta de dinheiro." (John Kenneth)

6.3 Relação entre razão e proporcionalidade: "regra de três"

- Grandeza Diretamente Proporcional.

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra também aumenta na mesma proporção, ou, diminuindo uma delas, a outra também diminui na mesma proporção.

Se duas grandezas X e Y são diretamente proporcionais, os números que expressam essas grandezas variam na mesma razão, isto é, existe uma constante K tal que:

$$\boxed{\frac{X}{Y} = K}$$

Exemplo: Uma torneira foi aberta para encher uma caixa com água. A cada 15 minutos é medida a altura do nível de água. (cm. = centímetros e min. = minutos)

15 minutos 50 cm	30 minutos 100 cm	45 minutos 150 cm

Construímos uma tabela para mostrar a evolução da ocorrência:

Tempo (min)	Altura (cm)
15	50
30	100
45	150

Observamos que quando duplica o intervalo de tempo, a altura do nível da água também duplica e quando o intervalo de tempo é triplicado, a altura do nível da água também é triplicada. Desta maneira tiramos as seguintes conclusões:

- Quando o intervalo de tempo passa de 15 min. para 30 min., dizemos que o tempo varia na razão 15/30, enquanto que a altura da água varia de 50 cm para 100 cm, ou seja, a altura varia na razão 50/100. Observamos que estas duas razões são iguais: $\frac{15}{30} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$
- Quando o intervalo de tempo varia de 15 min. para 45 min., a altura varia de 50 cm para 150 cm. Nesse caso, o tempo varia na razão 15/45 e a altura na razão 50/150. Então, notamos que essas razões são iguais:

$$\frac{15}{45} = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$$

- Concluímos que a razão entre o valor numérico do tempo que a torneira fica aberta e o valor numérico da altura atingida pela água é sempre igual, assim dizemos então que a altura do nível da água é diretamente proporcional ao tempo que a torneira ficou aberta.

6.4 Proporcionalidade

- **Regra de Três Simples**

"Regra de três simples" é um processo prático para resolver problemas que envolvem quatro valores dos quais conhecemos três deles. Devemos, portanto, determinar um valor a partir dos três já conhecidos.

Passos didáticos utilizados para resolver problemas com a regra de três simples:

1º Passo: Construir uma tabela, agrupando as grandezas da mesma espécie em colunas e mantendo na mesma linha as grandezas de espécies diferentes em correspondência.

2º Passo: Identificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.

3º Passo: Montar a proporção e resolver a equação.

Exemplo 1: Com uma área de absorção de raios solares de 1,2 m^2, uma lancha com motor movido à energia solar consegue produzir 400 watts por hora de energia. Aumentando-se essa área para 1,5 m^2, qual será a energia produzida?

Solução: montando a tabela:

Área (m^2)	Energia (Wh)
1,2	400
1,5	x

Identificação do tipo de relação:

Área	Energia
1,2	400
1,5	x $\downarrow$

Inicialmente colocamos uma seta para baixo na coluna que contém o x (2ª coluna). Observe que: **Aumentando** a área de absorção, a energia solar **aumenta**. Como as palavras correspondem (aumentando - aumenta), podemos afirmar que as grandezas são **diretamente proporcionais**. Assim sendo, colocamos uma outra seta no mesmo sentido (para baixo) na 1ª coluna. Montando a proporção e resolvendo a equação temos:

Área	Energia
1,2	400
1,5 $\downarrow$	x $\downarrow$

$$\frac{1,2}{1,5} = \frac{400}{x}$$

$$1,2x = 1,5.400$$

$$x = \frac{1,5.400}{1,2} = 500$$

Logo, a energia produzida será de **500 watts por hora**.

Exemplo 2: Um trem, deslocando-se a uma velocidade média de 400 km/h, faz um determinado percurso em 3 horas. Em quanto tempo faria esse mesmo percurso, se a velocidade utilizada fosse de 480 km/h?

Solução: montando a tabela:

Velocidade (Km/h)	Tempo (h)
400	3
480	x

Identificação do tipo de relação:

Velocidade	Tempo
400	3
480	x

Inicialmente colocamos uma seta para baixo na coluna que contém o x (2ª coluna). Observe que: **Aumentando** a velocidade, o tempo do percurso **diminui**. Como as palavras são contrárias (aumentando - diminui), podemos afirmar que as grandezas são **inversamente proporcionais**. Assim sendo, colocamos outra seta no sentido contrário (para cima) na 1ª coluna. Montando a proporção e resolvendo a equação temos:

Velocidade	Tempo
400 ↑	3 ↓
480	x

$$\frac{3}{x} = \frac{480}{400}$$

Invertemos os termos

$$480x = 3.400$$

$$x = \frac{3.400}{480} = 2,5$$

Logo, o tempo desse percurso seria de 2,5 horas ou 2 horas e 30 minutos.

Curiosidade

Um pouco da história das expressões algébricas.

Na Antiguidade, as letras foram pouco usadas na representação de números e relações. De acordo com fontes históricas, os gregos Euclides e Aristóteles (322-384 a.C), usaram as letras para representar números. A partir do século XIII, o matemático italiano Leonardo de Pisa (Fibonacci), autor do livro *Liber Abaci* (Livro do Ábaco) abordando a arte de calcular, observamos alguns cálculos algébricos.

O grande uso de letras para resumir mais racionalmente o cálculo algébrico passou a ser estudado pelo alemão Stifel (1486-1567), pelos italianos Germano (1501-1576) e Bombelli (autor de Álgebra publicada em 1572), porém, foi o francês François Viéte (1540-1603), que introduziu o uso ordenado de letras nas analogias matemáticas, quando desenvolveu o estudo do cálculo algébrico.

Expressões algébricas

São expressões matemáticas que apresentam letras e podem conter números. São também denominadas expressões literais. Por exemplo:

$A = 2a + 7b$
$B = (3.c + 4) - 5$
$C = 23.c + 4$

As letras nas expressões são chamadas de variáveis; o que significa que o valor de cada letra pode ser substituído por um valor numérico.

Nas operações em uma expressão algébrica, quando substituímos uma variável por um número, obedecemos à seguinte ordem de resolução, é importante observar que nada mais é que um modo objetivo de poupar cálculos com adições e multiplicações sucessivas:

1. Potenciação ou Radiciação;
2. Multiplicação ou Divisão;
3. Adição ou Subtração.

Observações quanto à prioridade:

1. Antes de cada uma das três operações citadas, deve-se realizar a operação que estiver dentro dos parênteses, colchetes ou chaves, justamente por estes indicarem o que vem primeiro em uma expressão algébrica/numérica.

2. A multiplicação pode ser indicada por "×" ou por um ponto "." ou às vezes sem sinal, desde que fique clara a intenção da expressão.

3. Muitas vezes devemos utilizar parênteses quando substituímos variáveis por valores negativos. Tal procedimento evita que se "percam" os sinais negativos das relações financeiras.

Exemplos:

Consideremos **P** = 2A+10 e tomemos **A**=5. Assim temos: **P** = 2.5+10 = 10+10 = 20.

Aqui **A** é a variável da expressão, 5 é o valor numérico da variável, e 20 é o valor numérico da expressão indicada por **P**. Observe que ao mudar o valor de **A** para 9, teremos: **A** = 2.9 + 10 = 18 + 10 = 28 se **A v** = 9, o valor numérico de **P** = 2A+10 é igual a 28.

Seja X = 4A+2+B-7 e tomemos A=5 e B=7. Assim temos: X = 4.5+2+7-7 = 20+2-0 = 22

Se A=5 e B=7, o valor numérico de X = 4A +2+B-7, vale 22.

Seja Y = 18-C+9+D+8C, onde C= -2 e D=1. Então: Y = 18-(-2)+9+1+8(-2) = 18+2+9+1-16 = 30-16 = 14. Se C = -2 e D = 1, o valor numérico de Y = 18-C+9+D+8C, é 14.

Através desses exemplos concluímos que o valor numérico de uma expressão algébrica é o valor obtido na expressão quando substituímos a variável por um número real.

Resumo

Nesta aula vimos que os Juros são reconhecidos como linguagem própria para representar diversas aplicações de capitalização na Matemática Financeira. É importante lembrar que o fator tempo (temporalidade) é fundamental para que se tenha entendimento de quanto se recebe ou se perde por uma aplicação financeira.

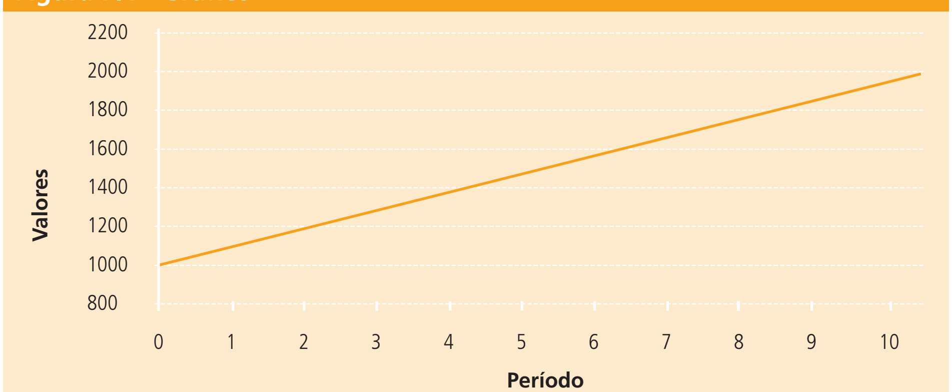
Aula 7 - Juros simples

Nesta aula estudaremos os juros simples, fundamentais para calcular a remuneração recebida pela aplicação de um capital (PV) a uma taxa de juros (i) durante determinado tempo (n).

7.1 Progressão Aritmética versus Juros simples

O regime de capitalização simples corresponde a uma progressão aritmética (PA), onde os juros crescem de forma linear ao longo do tempo. Como veremos no gráfico seguinte, um capital de R$ 1.000,00 aplicado por dez meses a uma taxa de 10% a.m., acumula um montante de R$ 2.000,00 no final.

Figura 7.1 - Gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor

O gráfico representa uma função afim f(x) = ax + b, crescente. Note que a reta inicia em R$ 1.000,00; e a maneira que o tempo passa a aplicação inicial se transforma em um montante de R$ 2.000,00 passados 10 meses de aplicação formando uma progressão aritmética de razão R$ 100,00.

7.1.1 Um pouco sobre a Progressão Aritmética (PA)

Considere as seguintes sequências de números:

I. 3, 7, 11,...
II. 2, 6, 18,...
III. 2, 5, 10, 17,...

O número que continua cada uma das sequências na ordem dada deve ser respectivamente:

a) 15, 36 e 24

b) 15, 54 e 24

c) **15, 54 e 26**

d) 17, 54 e 26

e) 17, 72 e 26

Observe que a sequência I tem razão igual a 4, pois, 3 → 7 → 11 → **15** "vai de 4 em 4" a razão da progressão é 4, ou a diferença entre 7 e 3 é igual a 4.

A sequência II não é uma PA, pois, a lei de formação se dá em fatores que são obtidos **multiplicando** os termos por três. Sendo assim: 2 → 6 → 18 → **54**.

A sequência III não é uma PA, pois, a lei de formação se dá em somas de números ímpares distintos (+ 3, +5, +7, +9). Sendo assim: 2 → 5 →10 → 17 → **26**.

Toda a lei de formação com números em sequência em que a **<u>diferença entre um número e seu anterior é constante</u>** recebe o nome de Progressão Aritmética, ou, simplificadamente, é conhecida pela abreviatura **P.A.**

A diferença entre os termos é chamada de **razão** r.

Fórmula do enésimo termo

Pela definição de P.A., a fórmula do segundo termo é:

$$a_2+a_1+r \qquad a_3 = a_2+r \qquad a_4=a_3+r \ \ldots$$

$$a_3 = a_1+r+r \qquad a_4 = a_1+2r+r$$

$$a_3=a_1+2r \qquad a_4=a_1+3r$$

Logo se pode deduzir que para um termo qualquer a_n :

$$\boxed{a_n = a_1+(n-1)r}$$

Retomando o conceito de função polinomial do 1º grau, por analogia, temos a mesma relação de variáveis:

$an = (n-1).r+a_1$
$f(x) = a.x+b$

Curiosidade

Fórmula da soma de uma P.A. feita por um “Piá”

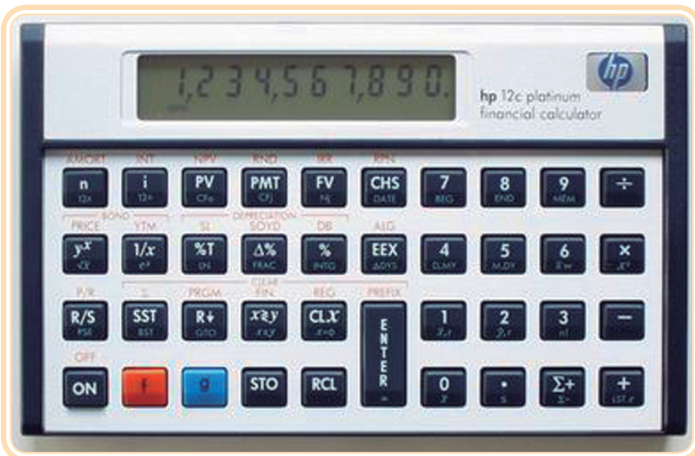


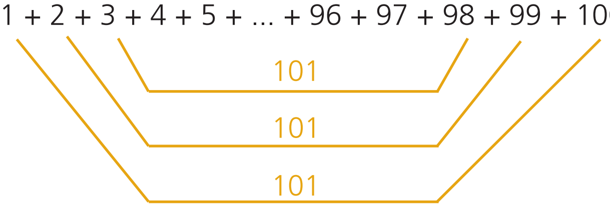
Figura 7.2 - HP-12C
Fonte: www.thimet.de.com

O diretor de uma escola (provavelmente professor de matemática), tentando manter a classe quieta, propôs um problema: somar todos os números de 1 a 100. Para a surpresa do professor, logo em seguida, um aluno (um “Piá”), Johann Carl Friedrich Gauss (mais tarde um grande matemático, viveu de 1777 - 1855) deu a resposta: 5.050.

Surpreso, o professor perguntou como Gauss conseguira o resultado tão rapidamente e ele explicou seu raciocínio:

Ele notou que o 1º algarismo mais o último era igual a 101 e que o 2º mais o penúltimo também era igual a 101:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$



Como existem 50 destes termos, tem-se:

$$50.101 = 5050$$

Resumo

Nesta aula estudamos os juros simples, fundamentais para calcular a remuneração recebida pela aplicação de um capital, também conhecido como valor presente. Neste capital incide uma taxa de juros (i) durante determinado tempo (n).

Anotações

Aula 8 - Os juros simples e a função afim

Veremos algo sobre funções, em especial, as funções afim e linear que serão úteis para o entendimento da progressão aritmética e da capitalização simples.

Juro (juramento) - como vimos anteriormente - é toda compensação em dinheiro que se paga ou se recebe pela quantia em dinheiro que se empresta ou que é emprestada em função de uma taxa e do tempo. Quando falamos em juros, devemos considerar:

- O dinheiro que se empresta ou que se pede emprestado é chamado de valor presente ou capital "C".
- A taxa de porcentagem que se paga ou se recebe pelo aluguel do dinheiro é denominada taxa de juros "J".
- O tempo **n** deve sempre ser indicado na mesma unidade a que está submetida a taxa, e em caso contrário, deve-se realizar a conversão para que tanto a taxa como a unidade de tempo estejam compatíveis, isto é, estejam na mesma unidade.
- O total pago no final do empréstimo, que corresponde ao capital mais os juros, é denominado valor futuro ou montante "M".

8.1 Fórmulas

Juros simples

Para calcular os juros simples de um valor presente ou capital "C", durante "n" períodos com a taxa de i% ao período, basta usar a fórmula:

$$\boxed{J = C \cdot i \cdot n}$$

Fórmula - Montante

Para calcular o valor futuro ou montante "M", durante "n" períodos com a taxa de i% ao período, sobre um valor presente ou capital "C", basta usar a fórmula:

$$\boxed{M = C \cdot (1 + i \cdot n)}$$

Exemplo 1.

Qual o valor de um capital que, aplicado à taxa de juros simples de 2% ao mês, rendeu depois de um ano R$ 240,00 de juros?

Solução:

Como a taxa é de i = 2% = 0,02 ao mês, devemos considerar, para o tempo de 1 ano, 12 meses, pois tempo e taxa devem estar na mesma unidade. Os juros produzidos neste período foram de R$ 240,00. Assim:

$J = C.\ i\ .n$
$240 = C\ .\ 0{,}02.\ 12$
$240 = C\ .\ 0{,}24 \rightarrow C = 1000$
O capital aplicado inicialmente foi de R$ 1.000,00.

Exemplo 2.

Qual o montante de um capital de R$ 1.000,00 aplicado à taxa de juros simples de 10 % a.a. (ao ano) pelo prazo de 2 anos ?

Solução:

Dados: $C = 1.000{,}00$
$i = 10\% = 0{,}1$ a.a.
$n = 2$ anos
$M = ?$
$M = C.\ (1 + i.\ n)$
$M = 1.000.\ (1 + 0{,}1.\ 2)$
$M = 1.200$

O montante, após 2 anos, à taxa de juros simples de 10 % a. a., será de R$ 1200,00.

Não esqueça:

Ao trabalhar com as fórmulas de juros devemos nos atentar para algumas particularidades das mesmas, tais como:

a) "i" deve estar em sua forma decimal, ou seja, se a taxa for de 10%, devemos dividir por 100, transformando-a em 0,10;

Em Resumo		
Forma Percentual	Transformação	Forma Decimal
12% a.a.	$\frac{12}{100}$	0,12
0,5% a.m.	$\frac{0,5}{100}$	0,005

b) Se unidade utilizada no período não for compatível ao da taxa de juros, deve ser feito a conversão de uma dela, ou seja, uma taxa de 5% a.m. e o período de 12 anos convertem-se a taxa para ano (para juros simples) ou o período para mês.

Resumo:

Na aula de hoje conhecemos um caso especial de função do tipo afim, úteis para o entendimento da progressão aritmética e da capitalização simples.

Anotações

Aula 9 - Juros compostos

Na aula nove estudaremos os juros compostos, fundamentais para calcular a remuneração recebida pela aplicação após cada período, os juros são incorporados ao principal e passam, por sua vez, a render juros. Também conhecido como "juros sobre juros".

J = C.i.n	M = C + j	M = C +C.i.n	M = C (1+ i.n)	J = M - C

1. Um capital de $ 2.000,00 foi aplicado durante três meses, sob regime de juros simples, à taxa de 18% a.a. Pede-se:

a) Juros **b)** Montante.

Solução: C = 4000,00 i = 18% a.a. n = 3 meses

a) J = C.i.n

J = 4000 {[(18/100)/12]x3}

J = 4000 {[0,18/12]x3}

J = 4000 {0,015 x 3}

J = 4000 x 0,045

J = 180,00

b) M = C + J

M = 4000 + 180

M = 4.180,00

2. Calcular o juro simples referente a um capital de R$ 2.400,00 nas seguintes condições:

Taxa de Juros Prazo	Taxa de Juros Prazo
a) 21% a.a.	1 ano
b) 21% a.a.	3 anos
c) 21% a.a.	3 meses
d) 21% a.a.	32 dias

Solução:

a) J = Cin

J = 2400 [(21/100)x1]

J = 2400 [0,21 x 1]

J = 2400 x 0,21

J = 504,00

b) J = Cin

J = 2400 [(21/100)x3]

J = 2400 [0,21x3]

J = 2400 [0,21x3]

J = 1.512,00

c) J = Cin

J = 2400 {[(21/100)/12]x3}

J = 2400 {[0,21/12]x3}

J = 2400 {0,0175x3}

J = 2400 x 0,0525

J = 126,00

d) J = Cin

J = 2400 {[(21/100)/360]x32}

J = 2400 {[0,21/360]x32}

J = 2400 {0,000583333 x 32}

J = 2400 x 0,018666667

J = 44,80

3. Um capital de $ 19.000,00 foi aplicado a juros simples à taxa de 39% a.a., pelo prazo de 56 dias. Obtenha os juros comerciais e exatos para esta aplicação.

Solução: J = Cin → Juros Comercias J' = Cin → Juros Exatos

Dados fornecidos no enunciado: C = 19000; i = 39% a.a.; n = 56 dias.

J = 19000 x {[(39/100)/36**0**] x 56}

J = 19000 x { [0,39/36**0**] x 56 }

J = 19000 x { 0,001083333 x 56 }

J = 19000 x 0,060666667

J = 1.152,67

J'= 19000 x {[(39/100)/36**5**] x 56}

J' = 19000 x { [0,39/36**5**] x 56 }

J' = 19000 x { 0,001068493 x 56 }

J' = 19000 x 0,059835616

J' = 1.136,88

Resumo

Hoje estudamos os juros simples por meio de alguns exercícios, para que futuramente possamos entender melhor os juros compostos, fundamentais para calcular a remuneração recebida pela aplicação após longo período de tempo.

Aula 10 - Progressão Geométrica

O objetivo da aula de hoje é estudar os juros compostos atrelados ao estudo das progressões geométricas, As progressõres são fundamentais para entender como os juros são incorporados ao principal e passam por sua vez a render juros. Os famosos "juros sobre juros".

Para que ocorram "juros sobre juros" levaremos em consideração o conceito de **Progressão Geométrica (PG).**

Podemos definir progressão geométrica, ou simplesmente P.G., como uma sucessão de números reais obtida, com exceção do primeiro, multiplicando o número anterior por uma quantidade fixa q, chamada razão.

Para calcular a razão da progressão, caso ela não esteja suficientemente evidente, divide-se entre si dois termos consecutivos. Por exemplo, na sucessão (1, 2, 4, 8,...), q = 2, pois 4 : 2 = 2 ou 8 : 4 = 2 e assim sucessivamente.

Termo geral de uma PG:

O termo geral de uma PG é dado por $\mathbf{a_n = a_1 \times q^{n-1}}$ e indica que, para obter um termo de posição **n** de uma PG, basta multiplicar o primeiro termo a1 pela razão **q** elevada a **n - 1**.

10.1 Exemplos de Progressões Geométricas:

1. 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 é uma PG de 8 termos, com razão 2. (Por exemplo, a divisão entre o segundo e primeiro termo é igual a 16 : 8 = 2, razão da PG)

5, 15, 45,135 é uma PG de 4 termos, com razão 3. (Por exemplo, a divisão entre o segundo e primeiro termo é igual a 15 : 5 = 2, razão da PG).

a) Calcular o 1º termo de uma P.G. cujo 6º termo vale 1 e a razão 2.

Retirando os valores do enunciado:

$a_1 = ?$
$n = 6$
$q = 2$
$a^6 = 1$

Resolvendo:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$a^6 = a1 \cdot Q^{6-1} = a1 \cdot 2^5 = 1$
$a_1 = 1/32$

2. Calcular o 1º termo de uma P.G. cujo 5º termo vale 2 e a razão 3.

Retirando os valores do enunciado:

$a_1 = ?$
$n = 5$
$q = 3$
$a_5 = 2$

Resolvendo:

$an = a_1 \cdot q^{n-1}$
$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} = a_1 \cdot 24 = 2$
$a_1 = 2/16$
$a_1 = 1/8$

3. Sendo 32 o primeiro termo de uma PG e 2 é a sua razão, calcule o termo de ordem 8.

Retirando os valores do enunciado:

$a_1=32$
$q=2$
$a_8=?$
$n=8$

Agora usando a fórmula do termo geral:

$a_n = a^1 \cdot q^{n-1}$

Resolvendo:

$an = a_1.qn\text{-}1$
$a_8 = a_1.q8\text{-}1$

$a_8 = 32.2^7$
$a_8 = 32.128$
$a_8 = 4096$

4. Sendo 16 o primeiro termo de uma PG e 3 é a sua razão, calcule o termo de ordem 6.

Retirando os valores do enunciado:

$a_1 = 16$
$q = 3$
$a_6 = ?$
$n = 6$

Usando a fórmula do termo geral:

$an = a_1 \cdot q^{n-1}$

Resolvendo:

$an = a_1.q^{n-1}$
$a_6 = 16.q^{6-1}$
$a_6 = 16.2^5$
$a_6 = 16.32$
$a_6 = 512$

Resumo

Revisamos os juros simples e demos início ao entendimento das progressões geométricas como base da Capitalização Composta.

Aula 11 - Juros Compostos versus Função Exponencial

O objetivo da aula é estudar a relação entre os Juros Compostos e a Função Exponencial, fundamental para o entendimento do rápido crescimento do montante nas aplicações financeiras.

Observem a demonstração a seguir:

Exemplo: Capital de R$ 500,00; juros de 1% a.m. período de 4 meses.

Tabela 11.1 - Demonstração

Período	Capital	Taxa	Juros	Montante
1	500	0,01	5	505
2	505	0,01	5,05	510,05
3	510,05	0,01	5,10	515,15
4	515,15	0,01	5,15	520,30

Fonte: Elaborado pelo autor

1º período: $M1 = C + Ci = C(1 + i)$

2º período: $M2 = M1 + M1i$

logo: $C(1+ i) + C(1+ i)\, i$

$$C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$$

3º período: $M3 = M2 + M2i = C(1 + I)^3$

4º período: $M4 = M3 + M3i = C(1 + i)^4$

Por dedução lógica chegamos à fórmula geral de juros compostos:

$\boxed{M = C.(1+i)^n}$ Fórmula análoga a do termo geral de uma PG:

$\boxed{a_n = a_1.q^{n-1}}$

Onde M = montante, C = capital principal, i = taxa de juros e n = número de períodos (pode ser representado pela letra "t") em que o principal C (capital inicial) foi aplicado.

Percebam que agora o número de períodos (n) é um expoente (nos juros simples só havia multiplicações), mostrando que os juros sobre juros terão uma forma exponencial no longo prazo.

Atenção!!

Na fórmula de juros (simples ou compostos), as unidades de tempo referentes à taxa de juros (i) e do período (n), tem de ser necessariamente iguais. Este é um detalhe importantíssimo, que não pode ser esquecido! Assim, por exemplo, se a taxa for 2% ao mês e o período 3 anos, deveremos considerar 2% ao mês durante 36 meses (3 x 12 = 36 meses).

Relembrando

Nas aulas 6 e 7 aplicamos um capital de R$ 1.000 por dez meses a uma taxa de 10% a.m., acumulando um montante de R$ 2.000 no final. Mas e se fossem a juros compostos?

Separando os dados fornecidos no enunciado do problema:

C = 1.000,00 i = 10% a.m. (ao mês) n = 10 meses M = ?

$M = C \times (1 + i)^n$

$M = 1.000 \times (1 + 0,1)^{10}$

$M = 1.000 \times (1,1)^{10}$

$M = 1.000 \times 2,59374$

$M = 2593,74$

O montante é R$ 2.593,74 e o gráfico fica representado pela função exponencial:

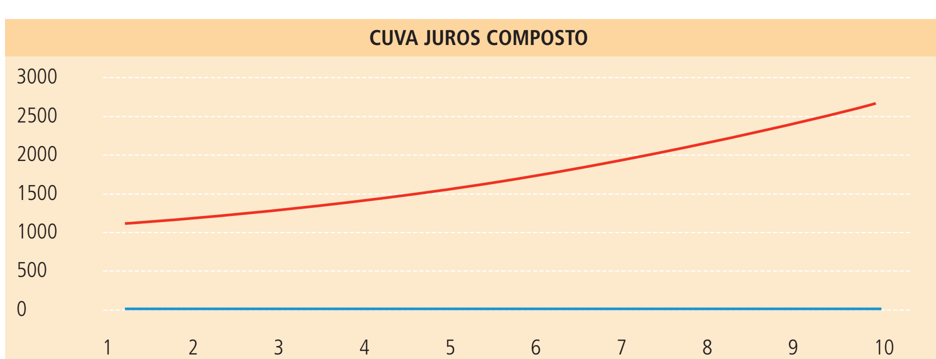


Figura 11.1 - Curva juros compostos
Fonte: elaborado pelo autor

Aula 12 - Juros Compostos, exercícios resolvidos e revisão

Nesta aula faremos a revisão de juros compostos por meio de exercícios práticos e cotidianos das relações financeiras com o mercado das finanças pessoais e empresariais.

1. Aplicou-se a juros compostos um capital de R$ 1.400.000.00, a 4% ao mês, durante 3 meses. Determine o montante produzido neste período.

Separando os dados fornecidos no enunciado do problema:

C = 1.400.000,00 i = 4% a.m. (ao mês) n = 3 meses M = ?

$M = C \times (1 + i)^n$

$M = 1.400.000 \times (1 + 0,04)^3$

$M = 1.400.000 \times (1,04)^3$

$M = 1.400.000 \times 1,124864$

$M = 1.574.809,600$

O montante é R$ 1.574.809,600

Obs.: devemos lembrar que 4% = 4/100 = 0,04

2. Qual o capital que, aplicado a juros compostos a 8% ao mês, produz em 2 meses um montante de R$ 18.915,00 de juros.

Separando os dados fornecidos no enunciado do problema:

C = ? i = 8% a.m. (ao mês) n = 2 meses M = 18.915,00

Obs.: devemos lembrar que 8% = 8/100 = 0,08

$M = C \times (1 + i)^n$

$18915 = C \times (1 + 0,08)^2$

$18915 = C \times (1,08)^2$

$18915 = C \times 1,1664$

$C = 18915 : 1,1664$

C = 16.216,56379 que é aproximadamente igual a C = R$ 16.216,56.

3. A que taxa ao mês esteve aplicado, em uma caderneta de poupança, um capital de R$ 1.440,00 para, em 2 meses, produzir um montante de R$ 1.512,90?

C = 1.440,00 i = ? % a.m. (ao mês) t = 2 meses M = 1.512,90

$M = C \times (1 + i)^n$

$1512,90 = 1440 \times (1 + i)^2$

$(1 + i)^2 = 1512,90 : 1440$

$(1 + i)^2 = 1,050625$

$1 + i = \sqrt{1,050625}$

$1 + i = 1,025$

$i = 0,025 \ (\times 100)$

$i = 2,5\%$

A taxa é 2,5% ao mês

A grande diferença dos juros é que no final das contas quem financia por juros simples obtêm um montante (valor total a pagar) inferior ao que financia por juros compostos.

Vamos comparar as duas aplicações de capitalização (simples e composto) para um mesmo valor de capital aplicado.

Lembre que a fórmula do Juro Simples é: **J = C. i . t ou J = C. i . n**

Onde:

J = juros, **C = capital**, **i = taxa**, **n ou t = tempo.**

Considerando que uma pessoa empresta para outra a quantia de R$ 2.000,00, a juros simples, pelo prazo de 3 meses, à taxa de 3% ao mês. Quanto deverá ser pago de juros?

Antes de iniciarmos a resolução deste problema, devemos retirar do enunciado os dados necessários a resolução do problema:

Capital aplicado (C): R$ 2.000,00

Tempo de Aplicação (t): 3 meses

Taxa (i): 3% ou **0,03** ao mês (a.m.)

Fazendo o cálculo, teremos:

J = c . i. t → J = 2.000 x 3 x 0,03 → R$ 180,00

Quer dizer que ao final do empréstimo, ao final dos três meses, a pessoa pagará R$ 180,00 de juros.

Observe que se fizermos a conta mês a mês, o valor dos juros será de R$ 60,00 por mês e esse valor será somado mês a mês, nunca mudará.

Agora e se fossem juros compostos?

A fórmula dos Juros Compostos é: $\boxed{M = C.\ (1 + i)^n}$

Onde:

M = Montante, **C = Capital**, **i = taxa de juros**, **n ou t = tempo.**

Considerando o mesmo problema anterior, da pessoa que emprestou R$ 2.000,00 a uma taxa de 3% (0,03) durante 3 meses, em juros simples, teremos:

Capital Aplicado (C) = R$ 2.000,00

Tempo de Aplicação (t) = 3 meses

Fazendo a conversão para decimal: taxa de Aplicação (i) = 0,03 (3% ao mês)

Fazendo os cálculos, teremos:

$M = 2.000.(\ 1 + 0{,}03)^3 \rightarrow M = 2.000\ .\ (1{,}03)^3 \rightarrow M = R\$\ 2.185{,}45$

Ao final do empréstimo, a pessoa pagará R$ 185,45 de juros.

Observe que se fizermos a conta mês a mês, no primeiro mês ela pagará R$ 60, 00, no segundo mês ela pagará R$ 61,80 e no terceiro mês ela pagará R$ 63,65.

Ou seja, no primeiro mês o juro corresponde a R$ 60,00;

No segundo mês o juro corresponde a R$ 61,80;

No terceiro mês o juro corresponde a R$ 63,65.

No final das contas no regime de juros simples o montante seria de R$ 2.180,00 (pagaria os R$ 2000,00 + R$ 180,00 de juros). Já no caso dos juros compostos o montante seria de R$ 2.185,45 (pagaria os R$ 2000,00 + R$ 185,45 de juros).

Quando usamos juros simples e juros compostos?

A maioria das operações envolvendo dinheiro utiliza juros compostos. Estão incluídas: compras a médio e longo prazo, compras com cartão de crédito, empréstimos bancários, as aplicações financeiras usuais como Caderneta de Poupança e aplicações em fundos de renda fixa, etc. Os bancos utilizam os juros compostos, é o modo dessas instituiçõeslucrarem com a concessão de crédito, financiamentos, todas as operações bancárias envolvem juros e riscos. As operações de baixo risco rendem pouco juro e as de alto risco rendem mais juros, por se tratarem de juros compostos.

Raramente encontramos uso para o regime de juros simples: é o caso das operações de curtíssimo prazo, e do processo de desconto simples de duplicatas. Tal fato ocorre dado o risco de se emprestar dinheiro e não receber o pagamento pela dívida, como o risco de uma pessoa (ou empresa) contrair uma dívida alta e não poder pagar, as instituições financeiras optam por regimes mais rentáveis de cobrança de juros.

Em resumo: **Relação entre juros e progressões**

→ Em um regime de capitalização a **juros simples**, o saldo cresce em **progressão aritmética**;

→ Em um regime de capitalização a **juros compostos** o saldo cresce em **progressão geométrica**;

O gráfico a seguir mostra a relação entre juros simples e compostos de modo comparativo:

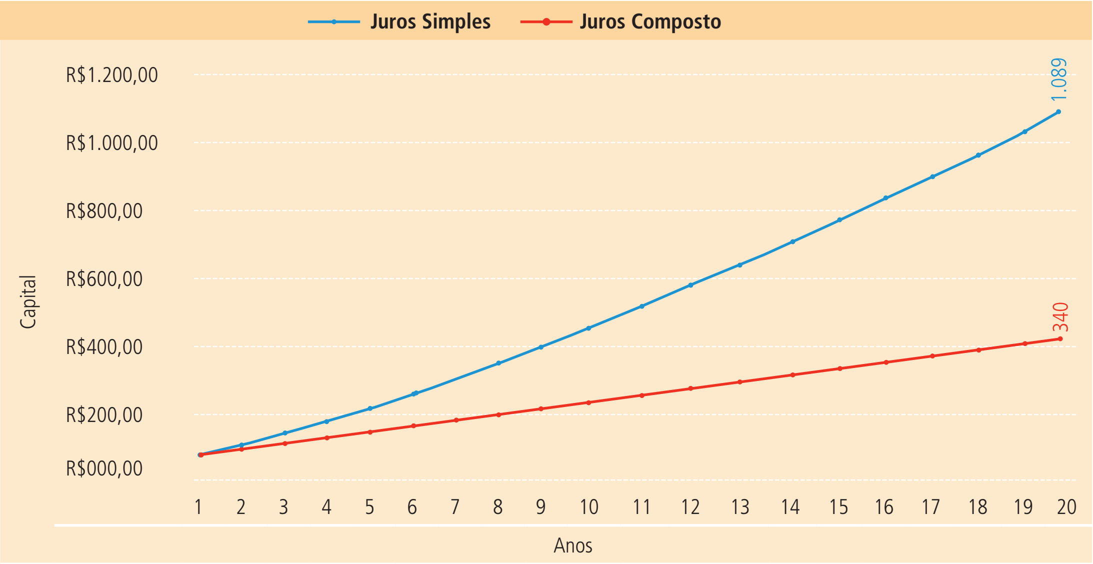


Figura 12.1 - Comparativo
Fonte: Elaborado pelo autor.

Resumo

Estudamos a relação entre os Juros Compostos e a Função Exponencial, fundamental para o entendimento do rápido crescimento do montante nas aplicações financeiras.

Anotações

Aula 13 - Taxas equivalentes: nominal e efetiva

Trataremos da conversão de taxas equivalentes. Você aprenderá a transformar taxas para períodos distintos e equivalentes e classificar os tipos de taxas de acordo com o período observado e condições político-econômicas.

Acompanhe a citação:

> "No mercado financeiro brasileiro, mesmo entre os técnicos e executivos, reina muita confusão quanto aos conceitos de taxas de juros principalmente no que se refere às taxas nominal, efetiva e real. O desconhecimento generalizado desses conceitos tem dificultado o fechamento de negócios pela consequente falta de entendimento entre as partes. Dentro dos programas dos diversos cursos de Matemática Financeira existe uma verdadeira 'poluição' de taxas de juros." (SOBRINHO, 2000)

Interessou? Vamos estudar a questão com maior profundidade e verificar qual seria a melhor definição para as taxas e aplicações no mercado de finanças.

13.1 Taxas

Duas taxas i1 e i2 são equivalentes e aplicadas ao mesmo Capital P durante o mesmo período de tempo, através de diferentes sistemas de capitalização, produzem o mesmo montante final.

Sendo assim em um ano a relação entre taxa mensal e anual é expressa por:

$$\boxed{1 + i_a = (1 + i_m)^{12}}$$

Exemplos:

1. Qual a taxa anual equivalente a 8% ao semestre?

Solução:

Em um ano temos dois semestres, então teremos: $1 + i_a = (1 + i_s)^2$

$1 + i_a = 1{,}082$
$i_a = 0{,}1664 = 16{,}64\%$ a.a.

Importante: ocorre que por conta dos juros serem em regime composto a conversão entre semestre e ano não é exatamente "o dobro de", No nosso exemplo a taxa semestral de 8% não é igual a duas vezes oito.

2. Qual a taxa anual equivalente a 0,5% ao mês?

Solução:

$1 + i_a = (1 + i_m)^{12}$
$1 + i_a = (1{,}005)^{12}$
$i_a = 0{,}0616 = 6{,}16\%$ a.a.

Importante: da mesma maneira ocorre que por conta dos juros serem em regime composto a conversão entre mês e ano não são exatamente 12 x 0,5 = 6. Existe um acréscimo por conta do regime de capitalização composto.

13.1.1 Taxas nominais

A taxa nominal é quando o período de formação e incorporação dos juros ao Capital não coincide com aquele a que a taxa está referida.

Alguns exemplos:

- 340% ao semestre com capitalização mensal.
- 1150% ao ano com capitalização mensal.
- 300% ao ano com capitalização trimestral.

Exemplos:

1. Uma taxa de 15% a.a., capitalização mensal, terá 16,08% a.a. como taxa efetiva:

15/12 = 1,25
1,2512 = 1,1608

2. Qual o montante de um principal de R$ 15.000,00, no fim de 1 ano, com juros de 12% a.a./a.t.

Calculadoras científicas têm teclas que operam com expoentes e base no valor que desejar, sendo assim $(1{,}03)^4 = 1{,}125508810$ aproximadamente 1,255.

Solução:

P = R$ 15.000,00
n = 1 ano
i = 12% a.a./a.t.
x = 4 (um ano possui 4 trimestres)

$$i_x = \frac{i}{x}$$

Assim temos:

$$i_4 = \frac{0{,}12}{4} = 0{,}03 \text{ a.t.}$$

$M = 15000 \cdot (1 + 0{,}03)^4$
$M = 15000 \cdot 1{,}1255$
M = **R$ 16.882,50**

13.1.2 Taxas efetivas

A Taxa Efetiva é quando o período de formação e incorporação dos juros ao Capital coincide com aquele a que a taxa está referida.

Alguns exemplos:

- 140% ao mês com capitalização mensal.
- 250% ao semestre com capitalização semestral.
- 1250% ao ano com capitalização anual.

Resumo

Tratamos da conversão de taxas equivalentes. Ao transformar taxas para períodos distintos e equivalentes e classificar os tipos de taxas de acordo com o período observado e condições político-econômicas; devemos tomar cuidado em verificar se a capitalização envolvida é simples ou composta.

Aula 14 - Outros tipos de taxas para operações financeiras

O objetivo desta aula é conhecer outros tipos de taxas mais adequadas ao mercado financeiro, são elas: taxa real e taxa efetiva.

14.1 Taxa real

É a taxa efetiva corrigida pela taxa inflacionária do período da operação, podendo ser inclusive negativas.

14.1.1 O caso BBB

Vamos analisar uma situação bem popular no Brasil: o caso BBB.

Milhões de brasileiros assistiram, pelo menos em parte, o Big Brother Brasil nas suas diversas edições. Não foi em vão que esse programa atingiu altos índices de audiência.O prêmio de R$ 1 500 000,00 atrai várias pessoas para participar do programa e atiça o desejo de ganhar o prêmio.

Não cabe aqui discutir o mérito do programa, mas sim analisar o que o senso comum aponta como solução imediata da questão: o que fazer com 1 milhão de reais?

Partindo do pressuposto de que você necessitasse de um tempo maior para decidir o que iria adquirir com essa importância, então, enquanto pensa no que fazer aplicaria imediatamente essa quantia na rede bancária para o capital não ficar se desvalorizando.

Se investisse toda essa importância a juros pós–fixados num prazo determinado, verificando que já possuía ao final desse período o montante de R$1,1 milhão (no caso de um prêmio de, por exemplo, R$ 1 000 000), estaria então auferindo um rendimento bruto de 10%. Diante dessa realidade, a pessoa teria a intenção de sacar apenas os juros reais auferidos, reaplicando o saldo que obviamente teria o mesmo poder de compra da época da primeira aplicação.

Se a taxa de inflação do período fosse de 4%, então a taxa de 10% obtida seria aparente, ou seja, ilusória, uma vez que teria que descontar a inflação. À primeira vista parece então que o rendimento líquido seria de 6%. Essa taxa significa que para cada R$ 100,00 aplicados, R$ 6,00 seria o ganho real.

Acontece, porém, que o correto seria de cada R$ 104,00 se auferiria R$ 6,00 de juros reais, porque R$ 4,00 seria somente a atualização do capital pelo índice inflacionário.

Dessa maneira fica bem claro que a taxa real de uma aplicação financeira é sempre menor que a diferença entre a taxa de rendimento bruto e a taxa de inflação.

Atividades de aprendizagem

1. Qual a taxa anual equivalente a 2% ao trimestre?

Solução:

2. Qual a taxa semestral equivalente a 5,6 % ao mês?

Solução:

3. Qual o montante de um principal de R$ 72.000,00, no fim de 1 ano, com juros de 8% a.a./a.t?

Solução:

4. Determinar:

a) Taxa para 183 dias equivalentes a 65% a.a. **R= 28,99**

Solução:

b) Taxa anual equivalente a 2% a.m. **R= 26,82**

Solução:

c) Taxa para 27 dias, equivalente a 13% a.trimestre. **R= 3,73**

Solução:

d) Taxa anual equivalente a 1% a.quadrimestre. **R= 3,03**

Solução:

e) Taxa trimestral equivalente a 47.746% em dois anos. **R= 5,00%**

Solução:

5. Dada a taxa de 3,96% em 37 dias, calcule a taxa equivalente em juros compostos para 93 dias. **R= 10,26%**

Solução:

6. Dada a taxa de 10,26% em 93 dias, calcule a taxa equivalente em juros compostos para 37 dias. **R= 3,96%**

Solução:

Resumo

Vimos três tipos de taxas, são elas: taxa nominal, taxa real e taxa efetiva.

Aula 15 - Operações de fluxo de caixa

Veremos nesta aula um tema de grande importância nas finanças: o valor presente e o valor futuro nas operações de fluxo de caixa.

15.1 Diagrama de fluxo de caixa

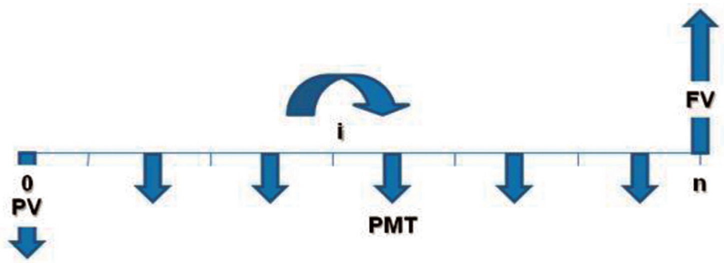


Figura 15.1- Elementos principais do diagrama
Fonte: Elaborado pelo autor

Legenda:

Escala Horizontal - expressa unidade temporal, podendo ser: dias, semanas, meses, anos etc.;

Setas para cima - consiste em entrada ou recebimento de dinheiro;

Setas para baixo - consiste em saídas ou pagamentos.

PV - *Present Value* (Valor Presente). Simboliza o valor do capital no momento presente, chamado de valor atual, capital ou principal.

PMT - *Payment* (Pagamento) ou ainda *Periodic Payment Amount* (valor do pagamento periódico). É o valor de uma parcela que pode ser adicionada ou subtraída do montante a cada período.

FV - *Future Value* (Valor Futuro). Simboliza o montante, o valor do capital após certo período de tempo, também chamado de valor futuro. É a soma do Capital com os juros.

15.2 Valor presente

Na fórmula $M = P. (1 + i)^n$, o principal **P** é também conhecido como Valor Presente (PV = *present value*) e o montante **M** é também conhecido como Valor Futuro (FV = *future value*). i é o índice de interesse (do inglês *interest rate*) – representa a **taxa de juros** e deverá estar indicada na mesma unidade de tempo que o número de períodos **n**, ou seja, se a taxa é i = 0,05 ao mês, então **n** deverá ser um número indicado em meses.

Então essa fórmula pode ser escrita como FV = PV (1 + i)n

Se isolarmos **PV** na fórmula temos:

$$\boxed{PV = FV / (1+i)n}$$

Observação:

Veremos que a maioria dos cálculos com as fórmulas apresentadas podem ser realizados com o auxílio de calculadoras financeiras. É o caso da HP-12C, calculadora lançada pela empresa de informática e tecnologia estadunidense Hewlett-Packard em 1981. O valor presente é representado, por exemplo, pela tecla PV (*present value*), sendo assim as siglas apareceram sempre com inicias da língua inglesa. Com esta mesma fórmula podemos calcular o valor futuro a partir do valor presente. Tendo em vista que a linguagem de cálculo e entrada de valores nas calculadoras HP é diferente das calculadoras convencionais deixaremos de lado o uso desse tipo de calculadora, apenas sugerimos alguns *links* com o manual do usuário e emuladores para utilizar a calculadora em seu computador ou *online*.

Neste *link*, você encontra o emulador da calculadora HP-12C disponível gratuitamente para teste na internet: http://www.epx.com.br/ctb/hp12c.php

Caso possua a versão mais atual do Windows no seu computador, poderá também fazer o download da HP-12C para a sua área de trabalho, desse modo não precisará de conexão com a internet para acessá-la. Em http://h10032.www1.hp.com/ctg/Manual/bpia5314.pdf está disponível o manual do usuário e de solução de problemas frequentes na HP-12C.

Exemplo:

1. Quanto teremos daqui a 12 meses se aplicarmos R$ 1.500,00 a 2% ao mês?

Solução:

$FV = 1.500. (1 + 0,02)^{12} = R\$ 1.902,36$

2. Quanto teremos daqui a 12 meses se aplicarmos $ 1.000,00 a 2,5% ao mês?

Solução:

$FV = 1000. (1 + 0,025)^{12} = R\$ 1.344,89$

15.3 Séries de pagamentos

Este estudo busca um entendimento das operações financeiras que envolvem pagamentos ou recebimentos parcelados.

Classificação:

Quanto ao prazo:

- Temporárias - duração limitada
- Perpétuas - duração ilimitada

Quanto ao valor:

- Constantes - parcelas iguais
- Variáveis - parcelas diferentes

Quanto à forma:

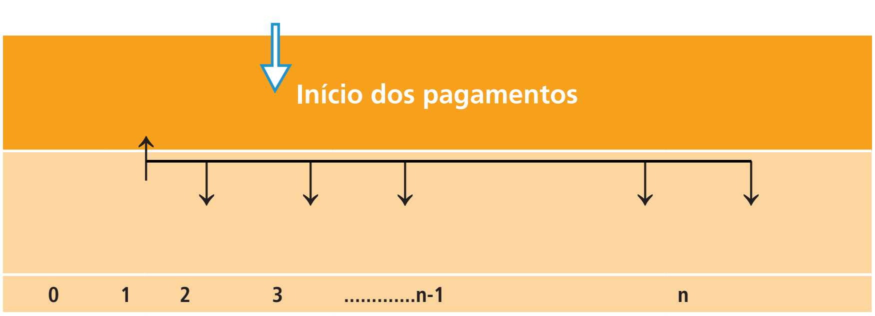
- Imediatas - quando ocorre no primeiro período, podendo ser antecipada (início do período) ou postecipada (final do período)
- Diferidas - operações com carência, podendo ser antecipadas ou postecipadas.

Quanto ao período:

- Periódicas - os intervalos entre as prestações são iguais.
- Não periódicas - os intervalos são diferentes.

15.3.1 Operações postecipadas

Caracteriza-se as operações postecipadas como sendo aquelas em que o vencimento da 1ª prestação é no final do período. Um termo de mercado para esta operação é: "a primeira só em 30 dias".



Este gráfico mostra a compra de um bem no instante zero e suas prestações vencendo a partir na 1ª, isto é, série postecipada.

Aqui estão as fórmulas para realizarmos estas operações:

$$PV = \frac{PMT\ [1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$$PMT = \frac{PV.i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Exemplo:

1. Qual o valor das prestações que serão pagas mensalmente, se uma TV que custa R$ 690,00 à vista, fosse vendida em 10 vezes, a taxa de juros de 5%a/m?

$$PMT = \frac{690.0{,}05}{1-(1+0{,}005)^{-10}}$$

$$PMT = \frac{34{,}50}{0{,}3861}$$

PMT= 89,36

2. Quanto custou à vista uma mercadoria que foi comprada em 8 x, a taxa de 3,7%a/m e prestações mensais, consecutivas e postecipadas de R$ 733,47?

$$PV = \frac{733{,}47.[1-(1+0{,}0037]^{-8}}{0{,}037}$$

$$PV = \frac{733{,}47.0{,}25223}{0{,}037}$$

$$PV = \frac{185}{0{,}037}$$

PV= 5000
O preço no instante zero, ou no ato, é de R$ 5.000,00.

Resumo

Foi exposto nesta aula um tema de grande importância nas finanças: o valor presente e o valor futuro nas operações de fluxo de caixa. Sendo que o valor presente é o valor do principal da aplicação ou resgate financeiro, e o valor futuro é o valor do principal que depois de determinado tempo acrescido de juros geram o montante da aplicação.

Aula 16 - Valor futuro

O foco da aula de hoje é trabalhar com o conceito de Valor Futuro ou do Montante nas aplicações financeiras de carência postecipada.

Vocês já devem ter percebido que quando vamos a uma loja e pedimos para o vendedor fazer o cálculo de quanto custa um determinado produto, parcelado, em um período de tempo, ele recebe do gerente de vendas uma tabela que contém todos os coeficientes para efetuar os cálculos de prestações, conforme o pedido dos clientes.

Para calcularmos estes coeficientes, utilizaremos a seguinte fórmula:

$$\text{Fator postecipado} = \frac{i}{[1-(1+i)^{-n}]}$$

Exemplo:

O exercício da TV que custa R$ 690,00, e o cliente quer o parcelamento em 10 vezes a taxa de juros utilizada é 5%a/m.

$$\text{Fator} = \frac{0{,}05}{[1-(1+0{,}05)^{-10}]}$$

Fator = 0,129504

Prestação = 690.0,129504

Prestação = 89,36

Exercício:

1. Elaborar uma tabela para parcelamento, parcelas consecutivas e postecipadas, até 6 vezes, com uma taxa de 3,5% a.m. Depois aplicar em uma geladeira que custa R$ 890,00.

16.1 Operações antecipadas

São operações onde os pagamentos começam no início da operação, ou seja, no ato.

No mercado é comum ver as seguintes situações: "Entrada mais '**n**' parcelas" ou "30 % de entrada e o saldo em 30/60 e 90 dias".

Para efetuarmos estas operações, vamos precisar das seguintes fórmulas:

$$PV = \frac{PMT[1-(1+i)^{-n}](1+i)}{i}$$

$$PMT = \frac{PVi}{[1-(1+i)^{-n}](1+i)}$$

Exemplo:

1. Calcule o valor das prestações pagas na compra de um bem que custa R$ 690,00 à vista, e que foi vendido em 1 + 9 vezes com juros de 5% a.m.

$$PMT = \frac{690.0,05}{[1-(1+0,05)^{-10}](1+0,05)}$$

$$PMT = \frac{34,50}{0,4054}$$

$$PMT = 85,10$$

16.2 Operações com carência postecipada

As operações com carência possuem a característica de o vencimento da primeira parcela ocorre em um período superior ao primeiro período subsequente ao da compra. As prestações serão calculadas através da seguinte fórmula:

$$PMT = \frac{PMT\dfrac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}}{(1+i)^{N}}$$

N significa o período de carência.

Obs.: período de carência de 90 dias. n = 3 meses

Vencimento da primeira parcela em 90 dias. n = 2 meses

Exercício:

Quanto custa à vista, uma mercadoria que foi comprada em oito vezes de R$ 359,15, a taxa de 3,2% a.m. com a primeira no ato.

$$PV = \frac{359{,}15\,[1-(1+0{,}032)^{-8}](1+0{,}032)}{0{,}032}$$

$$PV = \frac{359{,}15.0{,}2228.1{,}032}{0{,}032}$$

$$PV = \frac{82{,}58}{0{,}032}$$

$$PV = 2.580{,}60$$

O preço à vista da mercadoria é de R$ 2.580,60.

Resumo

Vimos conceitos de operações financeiras postecipadas, juntamente com o conceito de Valor Futuro ou do Montante nas aplicações financeiras com carência postecipada.

Anotações

Aula 17 - Descontos

O objetivo da aula é trazer à tona a questão dos descontos simples nas operações financeiras: o desconto comercial e o desconto racional.

17.1 Descontos

Quando uma pessoa contrai uma dívida é muito comum o credor emitir um documento que serve como comprovante desta operação financeira e é chamado de título. Comum também as empresas, que possuem o direito de receber os valores contidos nestes títulos, utilizarem um produto bancário chamado desconto. Este produto visa antecipar o valor a ser recebido em uma data futura, buscando assim atender eventuais necessidades de caixa. Exemplos de títulos: nota promissória; duplicata; letras de câmbio e cheques.

Existem dois tipos básicos de descontos simples nas operações financeiras: **o desconto comercial e o desconto racional.**

17.1.1 Desconto comercial ou por fora

Esta modalidade de desconto é amplamente utilizada no mercado, principalmente em operações bancárias e comerciais de curto prazo. A taxa de desconto neste sistema incide sobre o montante ou valor nominal do título; em consequência disto gera-se um valor maior e mais justo de desconto do que no sistema racional.

Este desconto equivale aos juros simples, onde o capital corresponde ao valor nominal do título. Assim temos:

N = valor nominal

V = valor atual

Dc = desconto comercial

d = taxa de descontos simples

n = número de períodos

No desconto comercial, a taxa de desconto incide sobre o valor nominal **N** do título. Logo:

$$Dc = N.i.n$$

Valor atual

$$V = N - Dc$$

Sabendo que Dc = N.i.n então:

$$V = N.(1-i.n)$$

Rir é o melhor remédio

Figura 17.1 - Rir
Fonte: http://www.blogbrasil.com.br

Isaac x Deus

Depois de muito sacrifício Isaac conseguiu uma audiência com Deus.

- Deus quanto vale 1.000.000 reais para o senhor?
- Um centavo Isaac, um mero centavo!
- Deus quanto vale um século para o senhor?
- Um segundo Isaac, um mero segundo!

Então Isaac rapidamente fez outra pergunta.

- Senhor Deus me dá um centavo?
- Espere só um segundo Isaac.

Exemplo:

Considere um título cujo valor nominal seja R$ 10.000,00. Calcule o desconto comercial a ser concedido para um resgate do título 3 meses antes da data de vencimento, a uma taxa de desconto de 5% a.m.

Solução:

$V = 10000.(1 - 0{,}05.3) = 8500$

$Dc = 10000 - 8500 = 1500$

Valor descontado = R$ 8.500,00

Desconto = R$ 1.500,00

Resumo

Nesta aula foram resgatadas as definições dos descontos simples nas operações financeiras: o desconto comercial e o desconto racional, aproximações e divergências no campo das finanças.

Anotações

Aula 18 - Desconto racional ou por dentro e desconto composto

Nesta aula vamos conhecer um pouco mais dos descontos utilizados nas aplicações financeiras, em especial o Desconto Racional e o Composto.

18.1 Desconto Racional

O desconto racional equivale aos juros simples, calculado sobre o valor atual do título. Ou seja, é aquele em que a taxa de desconto incide sobre o valor líquido do título.

Assim temos:

D_r = desconto racional

$$D_r = \frac{N.i.n}{1+i.n}$$

Sendo o valor atual a diferença entre o valor nominal e o desconto, temos:

Valor atual

$$V = N - D_r$$

Sabendo que Dr = (N. i . n) / (1 + i . n), então:

$$V = \frac{N}{1+i.n}$$

Exemplo:

Um título de R$ 6.000,00 a ser descontado à taxa de 2,1% a.m. faltando 45 dias para o vencimento do título, determine o desconto racional e o valor atual racional.

Solução:

$N = 6000{,}00$

$n = 45$ dias

$i = 2{,}1\%$ a.m. $= 0{,}021$ a.m. $= 0{,}0007$ a.d.

$$D_r = \frac{N.i.n}{1+i.n} = \frac{6000.0{,}0007.45}{1+0{,}0007.45} = \frac{189}{1{,}0315} = 183{,}22$$

$V = N - D_r$

$V = 6000 - 183{,}22$

$V = R\$5186{,}78$

18.2 Desconto composto

A definição de desconto composto é a mesma que do sistema de capitalização simples. O que diferencia um do outro é justamente o sistema de capitalização, que neste caso é composto.

A fórmula geral de desconto é: $D = N – Va$

A fórmula de desconto composto é: $\boxed{VA = \dfrac{N}{(1+i)^n}}$

Exemplos:

1. Calcular o desconto composto de um título de R$ 3.600,00, a taxa de 4,5% a.m. e antecipado em 2 meses.

$Va = 3600/(1 + 0{,}045)^2$

$Va = 3600/1{,}092 = 3.296{,}70$

Utilizando a fórmula geral de desconto; $D = N – Va$, temos: $D = 3600 – 3296{,}70 = 303{,}30$

2. Um título de R$ 10.000,00 será negociado em 3 meses antes do seu vencimento, a taxa de 8% a.m. Determine o valor presente.

$Va = 10000/ (1 + 0,08)^3$

$Va = 10000/1,26 \quad = \quad 7.936,50$

Atividades de aprendizagem

1. De quanto será o desconto que um título de R$ 8.000,00, a taxa de 8% a.m., sofre ao ser resgatado em dois meses antes do seu vencimento? (Resposta: R$ 6.858,72)

   Solução:

2. Uma duplicata, no valor de R$ 120.000,00 e com vencimento em 4 anos, por quanto será paga hoje se sofrer um desconto composto de 14% a.a? (Resposta: 71.049,59)

   Solução

3. Qual foi o desconto composto obtido para saldar uma dívida de R$ 80.000,00 dois meses antes do vencimento e a taxa de 12% a.m? (Resposta: R$ 16.204,08)

Solução:

4. Uma letra de câmbio foi paga 4 meses antes do seu vencimento, com um desconto composto de 9% a.m, tendo se reduzido para R$ 75600,00. Qual era o seu valor de face? (Resposta: 106.779,66)

Solução:

5. Qual o desconto composto obtido no resgate de um título de R$ 85.000,00, 5 meses antes do vencimento, a taxa de 8% a.m? (Resposta: 27.200,00)

Solução:

6. Qual o montante de R$ 152.000,00, a taxa de juros compostos de 7% a.m, durante 3 meses e 12 dias? (Resposta: R$ 191.314,73)

Solução:

7. A quantia de R$ 60.000,00 foi aplicada a juros compostos. Determine o montante depois um quarto de ano a 10% a.m. (Resposta: R$ 79.860,00)

Solução:

8. Determine o capital que aplicado a juros compostos de 6% a.m, durante 3 meses resultou em um montante de R$ 5.730,48. (Resposta: R$ 4.800,00)

Solução:

9. Uma aplicação no valor de R$ 780,00, durante 35 dias a uma taxa de juros compostos de 23% a.a, rende quanto? (Resposta: R$ 795,76)

Solução

10. Foi descontado um título no valor de R$ 6.800,00, quando faltavam 63 dias para seu vencimento, a uma taxa de desconto composto de 3% a.m. Calcular o valor do desconto. (Resposta: R$ 409,27)

Solução

11. Calcular o desconto de um título no valor de R$ 60.800,00, descontado a uma taxa de 42,58% a.a, quando faltavam 128 dias para o seu vencimento. (Resposta: R$ 7.204,64)

Solução

12. Um título no valor de R$ 6.800,00 foi resgatado 58 dias antes do vencimento, pelo valor de R$ 6.422,30. Calcular a taxa de desconto mensal. (Resposta: 0,30% a.m.)

Solução

Resumo

Nesta aula conhecemos um pouco mais dos descontos utilizados nas aplicações financeiras, em especial o Desconto Racional e o Composto.

Anotações

Aula 19 - Amortizações

No decorrer desta aula vamos definir e nos aprofundar nas técnicas de amortização, utilizando três tipos de tabelas: a SAC (Sistema de Amortização Constante), a SACRE (Sistema de Amortização Crescente) e a PRICE ou sistema Francês (tabelas de juro composto pelo autor Richard Price)

19.1 - O que é amortização?

É o pagamento de uma dívida ou de uma prestação de capital com vencimento futuro, antes do prazo estabelecido inicialmente. Muitas vezes os acordos de crédito com as entidades financeiras preveem a possibilidade de amortizações antecipadas, embora, geralmente são cobradas taxas penalizadoras como forma de compensar parte dos juros que deixarão de ser recebidos.

Amortizar que dizer abater, quitar parceladamente uma dívida, normalmente em partes, mas também pode ser de uma única vez, ou seja, amortizar é pagamento de uma dívida de modo antecipado.

Uma parcela de financiamento é composta por duas partes, amortização mais juros. A parte que corresponde à amortização é deduzida do saldo devedor, fazendo com que a dívida seja diminuída a cada período. Existem dois sistemas de amortização mais usados no sistema bancário e comercial: o PRICE ou FRANCÊS e o SAC. No caso específico do Banco Caixa Econômica Federal é utilizado o Sistema SACRE (Sistema de Amortização Crescente).

Segundo a NBC T 19.5, é obrigatório o reconhecimento da depreciação, amortização e exaustão. Veja na integra a lei que versa sobre as Normas Brasileiras de Contabilidade: Depreciação, Amortização e Exaustão.

Fonte: http://www.portaldecontabilidade.com.br/nbc/nbct19_5.htm

Depreciação é a redução do valor dos bens pelo desgaste ou perda de utilidade por uso, ação da natureza ou obsolescência.

A depreciação de um ativo começa quando o item está em condições de operar na forma pretendida pela administração, e cessa quando o ativo é baixado ou transferido do imobilizado.

A amortização consiste na recuperação contábil:

1) do capital aplicado na aquisição de bens e direitos classificados no ativo imobilizado, cuja existência ou exercício tenha duração limitada ou cuja utilização pelo contribuinte tenha o prazo limitado por lei ou contrato; e

2) dos custos, encargos ou despesas, registrados no ativo diferido, que contribuirão para a formação do resultado de mais de um período de apuração.

A principal distinção entre esses dois encargos é que, enquanto a depreciação incide sobre os bens físicos de propriedade do próprio contribuinte, a amortização relaciona-se com a diminuição de valor dos direitos (ou despesas diferidas) com prazo limitado (legal ou contratualmente).

19.2 Sistemas de Amortização (pagamento) do seu financiamento imobiliário

Figura 19.1 - Imóvel
Fonte: http://www.sxc.hu/

Existem diversos mecanismos de amortização de dívidas reconhecidas internacionalmente e disponíveis nos manuais de Matemática Financeira. No Brasil para atuar no sistema financeiro imobiliário (SFI) os bancos operam com o sistema de amortização constante (SAC), a tabela price (TP) e o sistema de amortização crescente (SACRE), trata-se de formas distintas de cálculo das prestações do seu financiamento imobiliário. Você precisa saber que em todos os sistemas de amortização uma parcela da prestação que você paga é destinada ao pagamento de juros e outra parcela é destinada à amortização (pagamento) da dívida. Além disto, ainda podem constar na prestação uma parcela do seguro de morte e invalidez permanente (MIP) e outra parcela do seguro para danos físicos do imóvel (DFI).

Os juros no sistema financeiro imobiliário estão atualmente na faixa de TR (Taxa de Referência) + 6% ao ano, TR + 8,16% ao ano e TR + 10,5% ao ano para família com renda de 1 salário mínimo até R$ 4.900,00 através da Carta de Crédito FGTS e TR + 12% ao ano TJLP + 5,5% ao ano ou INCC + 1% ao mês para famílias com renda superior a R$ 4.900,00 em outras modalidades com Recursos da Poupança, do Fundo de Amparo ao Trabalhador - FAT, ou outras fontes de Recursos (*Funding*) de Construtoras e Incorporadoras. A principal diferença entre o valor das prestações está na parcela da dívida que está sendo amortizada, e é esta a diferença entre estas três metodologias.

19.2 Sistemas de Amortização Constante - SAC

No sistema de amortização constante (SAC) a parcela de amortização da dívida é calculada tomando por base o total da dívida (saldo devedor) dividido pelo prazo do financiamento, como um percentual fixo da dívida, desta forma é considerado um sistema linear. No SAC a prestação inicial é um pouco maior que na Tabela Price, pois o valor que é pago da dívida (amortização) é maior, assim, você estará liquidando mais da dívida desde o inicio do financiamento e pagando menos juros ao longo de contrato.

À medida que a dívida começa a ser amortizada, a parcela dos juros e consequentemente a prestação como um todo tendem a decrescer, uma vez que o próprio saldo devedor se reduz. Com isso, no SAC, o saldo devedor e a sua prestação tendem a decrescer de forma constante desde o início do financiamento e não deixa resíduo desta forma, você estará menos exposto em caso de aumento do indexador do contrato (a TR, TJLP ou INCC) durante o financiamento.

19.3 Sistema de Amortização Crescente - SACRE

A diferença do SAC (Sistema de amortização constante) para o SACRE (Sistema de Amortização Crescente) é apenas o recálculo, ou seja, um novo cálculo após um determinado período de andamento do contrato. O SACRE é baseado na mesma metodologia do SAC, mas, sempre considerando o prazo remanescente (que falta) para pagar. Assim o recálculo força o crescimento da amortização e a rapidez do pagamento.

Ao contrário do que acontece no SAC a parcela de amortização não é constante e sim crescente, o que permite que a dívida seja paga mais rapidamente. O primeiro recálculo acontece com 12 (doze) meses e poderá tornar-se trimestral na hipótese da prestação não estar amortizando (pagando/ quitando) a dívida;

No SACRE, a partir de um determinado período, durante o prazo de financiamento, a prestação tende a cair continuamente até o final do financiamento. Exatamente por isto, o percentual de comprometimento da renda neste tipo de mecanismo de amortização tende a ser mais alto, em cerca de 30%, pois no decorrer do prazo do financiamento as prestações devem cair, e com isto diminuirá o grau de comprometimento da renda. Atualmente o SACRE é adotado pela Caixa Econômica Federal nas suas linhas que usam recursos do FGTS, como a Carta de Crédito FGTS Individual.

19.4 A Tabela Price (TP) ou Sistema Francês de Amortização (SFA)

Ao contrário do sistema SAC onde a amortização é igual, na Tabela Price todas as prestações são iguais. Este sistema seria ideal se não existisse no financiamento imobiliário a figura do indexador da prestação (índices: TR, TJLP, INCC, CUB, IGPM, etc.).

Para um financiamento de igual valor, a prestação da Tabela Price é sempre menor que a prestação no sistema SAC ou SACRE. Assim, no mecanismo de Cálculo da Tabela Price, a parcela que serve para amortizar a dívida é mais baixa (menor) no início do financiamento e cresce ao longo do contrato. Este financiamento é ideal para pagamento de veículos e crediário em geral que tem prazo curto e a prestação é fixa, mas, pode ser inadequado para financiamentos em longo prazo que contenham um indexador que, na hipótese de acelerar poderá deixar resíduo a ser renegociado no final do contrato.

Na Tabela Price, as prestações podem aumentar durante todo o prazo de financiamento. Nesse sistema, você estará mais exposto a um aumento nos indexadores provocados por um aumento da inflação e não temos bola de cristal para adivinhar o que ocorrerá daqui a vinte anos mesmo com a pretensa estabilidade.

Apesar deste risco de aumento nos indexadores pode também existir nos demais mecanismos de amortização. Ele é mais atenuado no sistema SAC ou SACRE já que o saldo devedor decresce mais rapidamente. Exatamente por isso, as instituições que adotam a Tabela Price nos seus financiamentos imobiliários tendem a aceitar um percentual menor de comprometimento da renda do que o aceito no SAC ou SACRE.

Resumo

No decorrer desta aula foram estudadas as técnicas de amortização, utilizando três tipos de tabelas: a SAC (Sistema de Amortização Constante), a SACRE (Sistema de Amortização Crescente) e a PRICE ou sistema Francês (tabelas de juro composto pelo seu autor Richard Price).

O Sistema de Amortização Crescente – SACRE era utilizado SOMENTE pela Caixa Econômica Federal, atualmente outros bancos de capital estrangeiro também aderiram ao sistema. A diferença básica entre este sistema e os outros (PRICE e SAC) é o de apresentar o valor da parcela de amortização superior, proporcionando uma redução mais rápida do saldo devedor. Também neste plano a prestação inicial pode comprometer até 30% da renda, enquanto nos outros o comprometimento máximo é 25% e o valor das prestações é decrescente.
Na página da Caixa Econômica Federal você encontra um simulador de financiamento habitacional: http://www.caixa.gov.br/habitacao/index.asp

Anotações

Aula 20 - Sistemas de amortização - formulário

Nesta aula faremos um resumo dos principais sistemas de amortização úteis ao entendimento dos financiamentos de Imóveis.

20.1 Sistema de amortização PRICE

As principais características deste sistema são:

- Prestações constantes;
- Amortizações crescentes;
- Juros decrescentes.

Para calcular as prestações, utilizaremos a seguinte fórmula:

$$PMT = PV. \frac{(1+i)^n \;.\; I}{(1+i)^n - 1}$$

Exemplo:

1. Elaborar a planilha Price de um empréstimo de R$ 120.000,00, a taxa de 5% a.m. em três prestações iguais e consecutivas.

$$PMT = 120000 \frac{(1+0,05)^3 \text{ x } 0,05}{(1+0,05)^3 - 1}$$

PMT = 120000 x (0,05788/0,15763)

PMT = 120000 x 0,3672 = R$ 44.065,00

n	PMT	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0				120.000,00
1	44.065,00	6.000,00	38.065,00	81.935,00
2	44.065,00	4.096,75	39.968,25	41.966,75
3	44.065,00	2.098,38	41.996,66	0

2. Considerar um empréstimo de R$ 100.000,00 tomado por uma empresa, para ser liquidado em três vezes iguais, com taxa de juros de 4,5% a.m. Elaborar a planilha PRICE.

n	PMT	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0				100.000,00
1				
2				
3				

20.2 Sistema de amortização constante - SAC

Este sistema é muito utilizado em créditos imobiliários. As principais características deste sistema são:

- Amortizações constantes;
- Juros decrescentes;
- Parcelas decrescentes.

Como este sistema tem por característica as amortizações constantes, basta, para calcular as amortizações, dividir o valor da dívida pelo número de prestações.

$$\text{Amortização} = \frac{PV}{n}$$

Exemplo:

1. Considerar um financiamento de R$ 50.000,00 a taxa de 4,8% a.m., para ser quitado em cinco prestações no sistema SAC.

Amortização = 50.000/5 = R$ 10.000,00

N	Saldo Devedor	Amortização	Juros	PMT
0	50.000,00			
1	40.000,00	10.000,00	2.400,00	12.400,00
2	30.000,00	10.000,00	1.920,00	11.920,00
3	20.000,00	10.000,00	1.440,00	11.440,00
4	10.000,00	10.000,00	960,00	10.960,00
5	0	10.000,00	480,00	10.480,00

Atividades de aprendizagem

1. Elaborar a planilha Price, para um empréstimo de R$ 85.000,00 a uma taxa de 6% a.m. em 10 vezes.

2. Elaborar a planilha SAC, para um empréstimo de R$ 98.000,00 a uma taxa de 5,5% a.m. em oito vezes.

Em resumo:

<table>
<tr><th colspan="3">Tabela 20.1 – Tabela I</th></tr>
<tr><th>Tabela Price - Sistema de Amortização</th><th>SACRE - Sistema de Amortização Crescente</th><th>SAC - Sistema de Amortização Constante</th></tr>
<tr><td>• prestação fixas a cada 12 meses
• limite de até 25% da renda familiar
• financiamento em parcelas iguais
• sem residual, reajuste feito durante o financiamento
• composto por amortização de juros
• juros compostos
• juros maiores que por SACRE e SAC
• valor de financiamento maior</td><td>• limite de até 30% da renda familiar
• prestações fixas a cada 12 meses
• recomendável se puder
• desembolsar mais no começo
• amortização é mais rápida diminuindo o valor dos juros</td><td>• prestação decrescente com reajustes a cada 12 meses
• sistema decrescente, já que desde o começo há a amortização
• os juros são calculados sobre o residual , como é amortizado, os juros caem assim como a mensalidade final
• o valor das mensalidades decrescente</td></tr>
<tr><td>Para um profissional em ascensão, com grandes chances de promoções ou aumento de salário, em função de seu planejamento profissional, a Price é uma boa saída.</td><td colspan="2">Para profissional estabilizado, sem muitas possibilidades de promoções ou aumento salariais nos próximos anos e puder pagar um valor mais elevado na primeira prestação, o indicado seria a SAC ou a SACRE, uma vez que as mensalidades vão diminuindo ao longo dos anos. Comprometimento da renda ideal, segundo os especialistas, é de 30%.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Vários contratos firmados até 28/07/93 tem valor residual a ser pago pelo Fundo de Compensação de Variação Salarial (FCVS).</td></tr>
<tr><td colspan="3">De qualquer forma, a melhor forma de se livrar de financiamentos, seus reajustes, indexadores e correção monetária, ainda é comprando à vista.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Para tirar suas dúvidas, pergunte ao seu gerente ou a alguém que tenha imóvel financiado.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor

Agora vamos analisar o seguinte depoimento:

“Entendo a Tabela "Price" como uma das mais práticas e harmônicas aplicações dos conhecimentos da engenharia econômica para o bem estar do cidadão. Lembro-me bem quando comecei a estudar matemática no ginásio (5ª série do primeiro grau de hoje). Não vislumbrava as aplicações para tudo aquilo. O mesmo aconteceu no científico. Por incrível que pareça na faculdade. Deparei–me deparei com a Tabela "Price" quando cursava o primeiro ano da faculdade e já trabalhava. O caso que apareceu em minhas mãos foi o início de uma "paixão", que dura até hoje. Conviver com as nuanças do "Valor do Dinheiro no Tempo" simplesmente é um alimento para novos desafios. A Tabela "Price" é uma das filhas da Matemática Financeira ou Engenharia Econômica. Ela está no nosso cotidiano e às vezes passa despercebida. O fato de pensarmos em comprar alguma coisa a prazo ou a vista já envolve a Tabela "Price". Sei que os vendedores das lojas de eletrodomésticos nunca, na sua grande maioria, ouviram falar dessa genialidade, mas a usam constantemente quando fazem contas de valores de prestações usando "fatores" que lhes foram fornecidos para lhes facilitar a vida."

Fonte: http://www.portaldefinancas.com/indextp.htm, acessado em 27/10/09.

Um financiamento de 120 meses para um imóvel com valor de R$ 50.000,00; taxa de juros de 12% a.a. e TR (taxa referencial de juros obrigatória por lei) mensal de 0,2149%.

Sistema de amortização adotado: SACRE (Sistema de Amortização Crescente)

Fórmula: Prestação = saldo devedor x {(1/n) + (taxa juros mês/100)}

Sendo assim:

Prestação = 50.000 x { (1/120) + (0,01) } = 916,67

Assim temos o valor da primeira parcela. Consideramos n como sendo o período total do financiamento menos o período já pago. Neste exemplo, para a primeira parcela n é igual a 120. Para a 13ª parcela n será igual a 108 (120 – 12).

O saldo devedor do financiamento é corrigido mensalmente pela TR (0,21490%). Desta forma, primeiro corrige-se o saldo devedor, depois diminui a parcela da amortização, e assim, terá o saldo devedor corrigido.

Cálculo do valor mensal dos juros a pagar:

Valor juros mensal = taxa juros mês x saldo devedor mês x TR

Cálculo do valor da amortização do seu financiamento

Valor amortização = prestação - valor juros mês

Sendo assim temos a seguinte tabela:

N	Amortização	Juros	Prestação	Saldo Devedor
0	-	-	-	50000,00
1	809,22	107,45	916,67	49190,78
2	810,96	105,71	916,67	48379,82

Passados os 12 primeiros meses, o saldo devedor será corrigido, gerando uma nova prestação que durará por mais 12 meses.

Atividades de aprendizagem

Faça a simulação para o valor de um financiamento de R$ 60.000,00 com as mesmas taxas e período de 10 meses para preencher a tabela, formando uma nova com o sistema SACRE.

Resumo

Nesta aula revisitamos os principais sistemas de amortização úteis ao entendimento dos financiamentos de imóveis para o entendimento de qual seria o melhor sistema para a compra de um imóvel em longo prazo.

Referências

Augusto Cesar MORGADO, Eduardo WAGNER, e Sheila C. Zani. **Progressões e Matemática Financeira**. SBM, Rio de Janeiro, 4 a. edição, 2001.

BAUER, Udibert Reinoldo - **Matemática financeira fundamental**. Ed. Atlas. SP 2003.

BRUNI, Adriano Leal & FAMÁ, Rubens. **Matemática Financeira: com HP 12c e Excel**. São Paulo: Atlas, 2002

CRESPO, Antônio Arnot. (2001) **Matemática Comercial e Financeira Fácil**. 13a. ed. São Paulo: Saraiva.

FRANCISCO, Walter de. **Matemática Financeira**. São Paulo: Atlas, 1991

GUERRA, Fernando. (2006) **Matemática Financeira com a HP12C**. 3. ed. Florianópolis: Editora da UFSC.

KUNHEM, Osmar Leonardo - **Matemática Financeira Empresarial**. Ed. Atlas. São Paulo, 2006.

LAPPONI, Juan Carlos. **Matemática Financeira - Uma Abordagem Moderna** - Lapponi Editora Ltda, 2ª Edição, 1994.

LAPPONI, Juan Carlos. **Matemática financeira: usando Excel 5 e 7**. São Paulo: Lapponi Treinamento e Editora Ltda., 1996

MATHIAS, Washington Franco Gomes, José Maria - **Matemática Financeira** Editora Atlas, 1996.

MATIAS Washington Franco & GOMES, José Maria. **Matemática Financeira**. São Paulo: Atlas, 1992

MERCHEDE,Alberto - **Matemática Financeira, para usuários de HP12C e Excel**. Ed. Atlas. SP 2001.

NETO, Alexandre Assaf Martins, Eliseu **Administração Financeira** - Editora Atlas, 2000.

SAMANEZ, Carlos Patrício. (2006) **Matemática Financeira: Aplicações à Análise de Investimentos**. 4a. ed. São Paulo: Pearson.

SECURATO, José Roberto. (2005) **Cálculo Financeiro das Tesourarias**. 3. ed. São Paulo: Saint Paul.

VERAS, Lilia Ladeira. **Matemática financeira: uso de calculadoras**

financeiras, aplicações ao mercado financeiro, introdução à engenharia econômica, 300 exercícios resolvidos e propostos com respostas. São Paulo: Atlas, 2001.

VIEIRA SOBRINHO, J. D. **Matemática financeira**. 7 ed., São Paulo: Atlas, 2000.

Referências das ilustrações

Figura 1.1 - Dinheiro e Temporalidade
Fonte: http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1064585

Figura 1.2 - Pré História
Fonte: http://professor-rogerio.blogspot.com/2011/03/pre-historia.html

Figura 1.3 - Reinado
Fonte: http://fprina.wordpress.com/2008/07/

Figura 1.4 - Banqueiros
Fonte: http://bancariosorocaba.blogspot.com/2010/09/banqueiros-nao-sabem-de-onde-tirar.html

Figura 1.5 - Dinheiro
Fonte: http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1317230

Figura 1.6 - Tempo
Fonte: http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=579198

Figura 1.7 - Escrita dos sumérios
Fonte: http://www.mundovestibular.com.br/articles/4521/1/ESCRITA/Paacutegina1.html

Figura 1.8 - Hindu
Fonte:http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1338

Figura 1.9 - Índices
Fonte: http://www.sxc.hu/ browse.phtml?f=download&id=1212912

Figura 2.1 - Estrada
Fonte: http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1343300

Figura 2.2 - Densidade demográfica
Fonte: http://www.grupoescolar.com/materia/escalas.html

Figura 2.3 - Preço
Fonte: http://2.bp.blogspot.com/_fNWcgG0HE6Y/SuNwJcGfdTI/AAAAAAAAAMM/N4bdx8GkXEs/s1600-h/Folheto+Mercado.jpg

Figura 3.1 - Dados
Fonte: http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1085831

Figura 4.1 - Porcentagem
Fonte: http://lbarreiros.blogspot.com/2011/05/descontos-em-cascata.html

Figura 5.1 - Imposto de Renda
Fonte: http://www.dicastotal.com/2011/04/imposto-de-renda-2011-perdeu-o-prazo-saiba-o-que-fazer/

Figura 6.1 - Sem juros
Fonte: http://personaleasy.com/products/X-sem-juros.html

Figura 6.3 - Bolsos vazios
Fonte: http://bastacomunicacao.wordpress.com/page/42/

Figura 6.4 - Dinheiro
Fonte: http://www.sxc.hu/

Figura 7.1 - Gráfico
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 7.2 - HP 12C
Fonte: http://www.thimet.de/calccollection/Calculators/HP-12C/Contents.htm

Figura 11.1 - Curva juros compostos
Fonte: elaborado pelo autor

Figura 12.1 - Comparativo
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 15.1- Elementos principais do diagrama
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 17.1 - Rir
Fonte: http://www.blogbrasil.com.br/sera-que-rir-e-o-melhor-remedio/

Figura 19.1 - Imóvel
Fonte: http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1153174

Tabela 20.1 - Tabela I
Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 4.1 - Representação
Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 5.1 - Valor das quotas
Fonte: http://www.receita.gov.br/PessoaFisica/IRPF/2003/Orientacoes/ManualSimplificado/PagamentoNoPrazo.htm, acessado em 09/09.

Tabela 11.1 - Demonstração
Fonte: Elaborado pelo autor

Atividades autoinstrutivas

1. Quanto é 13% de R$ 850,00?

a) R$ 130,00

a) R$ 120,50

b) R$ 110,50

c) R$ 108,00

d) R$ 100,00

2. 30% de R$ 640,00 é igual a:

a) R$ 182,00

b) R$ 192,00

c) R$ 198,00

d) R$ 207,00

e) R$ 190,50

3. Um aluguel de R$ 550,00 sofreu um aumento de 18%. Ele passou a valer:

a) R$ 649,00

b) R$ 612,00

c) R$ 504,00

d) R$ 99,00

e) R$ 200,10

4. **(CESCEM-SP)** 3% de 0,009 vale:

a) 0,00027

b) 0,0027

c) 0,00009

d) 0,09

e) 0,0081

5. Assinale a **alternativa correta**:

a) 6% = 0,6

b) 13% = 1,3

c) 140% = 1,4

d) 20,5% = 0,0205

e) 100% = 1,001

6. 30% de R$ 640,00 é igual a:

a) R$ 182,00

b) R$ 192,00

c) R$ 198,00

d) R$ 207,00

e) R$ 208,20

7. Assinale a **alternativa correta**:

a) 60% = 0,06

b) 13% = 1,03

c) 140% = 1,04

d) 20,5% = 0,250

e) 100% = 1

8. Em 20/03/2005 o saldo bancário de Roberto era de R$ 1.500,00 positivo. Entre os dias 20 a 28 de março de 2005, o extrato bancário de Roberto mostrou a seguinte movimentação:

- 21/03/2005, retirada de R$ 400,00
- 22/03/2005, retirada de R$ 350,00
- 23/03/2005, depósito de R$ 100,00
- 24/03/2005, retirada de R$ 990,00
- 26/03/2005, depósito de R$ 560,00
- 28/03/2005, retirada de R$ 230,00

Qual será o saldo bancário de Roberto, no final do dia 28/03/2005?

a) R$ 180,00

b) R$ 190,00

c) R$ 198,00

d) R$ 270,00

e) R$ 280,00

9. Ao verificar seu controle de despesas, Gustavo percebeu que alguns débitos e créditos ainda não haviam sido anotados para o respectivo saldo. Calcule-os e, em seguida, preencha os retângulos: créditos e débitos destacados na tabela:

Data Mês abril	Descrição	Crédito (R$)	Débito (R$)	Saldo (R$)
02	Saldo anterior	480,30		480,30
03	Pagto. do cartão de crédito			- 50,15
05	Tarifa Banco (c/c especial)			- 30,10
06	Pagto da parcela da internet			- 70,45
09	Conta de telefone			- 232,40
14	Depósito			567,60
19	Conta de água			- 277,40
23	Prestação do carro			- 314,20
29	Conta de luz			- 403,40
30	Depósito salário			1596,60

Levando em consideração que não houve mais entrada nem saída de valores da CC de Gustavo, o saldo final da conta corrente de Gustavo no dia 30 de abril, é igual a:

a) R$ 1266,40

b) R$ 1399,20

c) R$ 1488,55

d) R$ 1570,59

e) R$ 1616,56

10. Calcular os juros simples de R$ 1.200,00 a 13 % a.t. por quatro meses e 15 dias.

a) R$ 234,00

b) R$ 199,20

c) R$ 148,50

d) R$ 150,00

e) R$ 166,00

11. Calcular os juros simples produzidos por R$40.000,00, aplicados à taxa de 36% a.a., durante 125 dias.

a) R$ 5000,00

b) R$ 9999,20

c) R$ 4488,55

d) R$ 5857,59

e) R$ 1616,56

12. Qual o capital que aplicado a juros simples de 1,2% a.m. rende R$3.500,00 de juros em 75 dias?

a) R$ 116.666,67

b) R$ 125.445,20

c) R$ 441.488,55

d) R$ 581.657,59

e) R$ 161.216,56

13. Se a taxa de uma aplicação é de 150% ao ano, quantos meses serão necessários para dobrar um capital aplicado através de capitalização simples?

a) 8 meses

b) 10 meses

c) 15 meses

d) 20 meses

e) 25 meses

14. Aplicou-se a juros compostos uma capital de R$ 1.400.000.00, a 4% ao mês, durante 3 meses. O montante produzido neste período é igual a:

Obs.: devemos lembrar que 4% = 4/100 = 0,04

a) R$ 1.880.809,60

b) R$ 1.990.555,00

c) R$ 1.988.520,00

d) R$ 2.700.790,00

e) R$1.574.809,60

15. Qual o capital aproximado que aplicado a juros compostos a 8% ao mês, produz em dois meses um montante de R$ 18.915,00 de juros.

a) R$ 12.880,60

b) R$ 13.990,20

c) R$ 14.988,55

d) R$ 15.700,59

e) R$16.216,56

16. A que taxa ao mês esteve aplicado, em uma caderneta de poupança, um capital de R$ 1.440,00 para, em dois meses, produzir um montante de R$ 1.512,90?

a) 2,5% ao mês

b) 2,4% ao mês

c) 2,3% ao mês

d) 2,2% ao mês

e) 2,1% ao mês

17. Em quanto tempo um capital triplica de valor aplicado a uma taxa de 20% a.a.?

a) 5 anos

b) 10 anos

c) 15 anos

d) 20 anos

e) 25 anos

18. Quanto renderá de juro uma quantia de R$ 80 000,00 aplicada durante 6 meses a uma taxa de 3% ao mês?

a) R$ 14.880,20

b) R$ 14.990,20

c) R$ 14.988,05

d) R$ 14.700,50

e) R$ 14.400,00

19. (FGV-SP) Um capital C foi aplicado a juros simples durante 10 meses, gerando um montante de R$10.000,00; esse montante, por sua vez, foi também aplicado a juros simples, durante 15 meses, à mesma taxa da aplicação anterior, gerando um montante de R$13.750,00. Qual o valor de C?

a) R$ 8.880,20

b) R$ 8.990,20

c) R$ 8.988,05

d) R$ 8.700,50

e) R$ 8.000,00

20. Uma aplicação de R$ 40 000,00 rendeu, em 3 meses, a quantia de R$ 4 800,00 de juro. Qual foi a taxa mensal de juro?

a) 2%

b) 4%

c) 3%

d) 2,2%

e) 1%

21. Certa quantia, aplicada durante 5 meses a uma taxa mensal de 3%, rendeu R$ 8 250,00. Qual foi a quantia aplicada?

a) R$ 64 900,00

b) R$ 61 200,00

c) R$ 50 000,00

d) R$ 99 000,00

e) R$ 55 000,00

22. (FGV-SP) Antônio investiu a quantia recebida de herança em três aplicações distintas: 35% do total recebido em um fundo de renda fixa; 40% do valor herdado em um fundo cambial e o restante da herança em ações. No final de um ano as aplicações renderam de juro, um total de R$28 500,00. Determine a quantia herdada por Antônio, sabendo que os rendimentos anuais foram de 30%, 20% e 40%, respectivamente, no fundo de renda fixa, no fundo cambial e nas ações.

a) R$ 105 900,00

b) R$ 110 200,00

c) R$ 150 000,00

d) R$ 199 000,00

e) R$ 100 000,00

23. (FGV-SP) Um investidor aplicou a juros simples na mesma data, por 20 dias, em fundos diferentes que operam no sistema de juro simples, os capitais de R$ 110 000,00 e R$ 80 000,00. No final do período o maior valor, aplicado à taxa de 9% ao mês, rendeu, de juro, R$ 3 400,00 a mais que a aplicação do menor valor. Determine a taxa mensal de juros de aplicação do menor valor.

a) 2% a.m.

b) 4% a.m.

c) 3% a.m.

d) 22% a.m.

e) 6% a.m.

23. (FGV) Um vidro de perfume é vendido à vista por R$ 48,00 ou a prazo, em dois pagamentos de R$ 25,00 cada um, o primeiro no ato da compra e o outro um mês depois. A taxa mensal de juros das parcelas é aproximadamente igual a:

a) 6,7%

b) 7,7%

c) 8,7%

d) 9,7%

e) 10,7%

24. Mário tomou emprestado R$ 240 000,00 durante 3 meses, à taxa de 60% ao ano. Que quantia devolveu após os 3 meses, no regime simples de formação?

a) R$ 115 000,00

b) R$ 111 000,00

c) R$ 155 000,00

d) R$ 196 000,00

e) R$ 276 000,00

25. (FGV-SP) Pedro aplicou R$ 20 000,00 por um ano em dois fundos A e B. O fundo A rendeu 10% e B rendeu 25%. Sabendo que o ganho proporcionado pelo fundo B foi superior ao de A em R$100, 00, podemos afirmar que a diferença (em valor absoluto) dos valores aplicados em cada fundo foi de:

a) R$ 8 000,00

b) R$ 7 000,00

c) R$ 5 000,00

d) R$ 6 000,00

e) R$ 9 000,00

26. Calcule o juro produzido por R$ 90 000,00, durante 90 dias, a uma taxa de 3,5% ao mês.

a) R$ 8 100,00

b) R$ 7 200,00

c) R$ 5 300,00

d) R$ 6 500,00

e) R$ 9 450,00

27. Calcular o juro que um capital de R$ 12 000,00 rende, durante 23 dias, à taxa de 30% ao mês.

a) R$ 1 100,00

b) R$ 2 200,00

c) R$ 3 300,00

d) R$ 2 760,00

e) R$ 2 790,00

28. Qual é o juro produzido pelo capital de R$ 18 500,00 durante 1 ano e meio, a uma taxa de 7,5% ao mês?

a) R$ 15 975,00

b) R$ 11 200,00

c) R$ 15 900,00

d) R$ 29 975,00

e) R$ 24 975,00

29. Um comerciante tomou emprestado de um banco R$ 400 000,00. O banco emprestou a uma taxa de juro de 38% ao ano. O comerciante teve que pagar R$ 304 000,00 de juros. Por quantos anos o dinheiro esteve emprestado.

a) 6 anos

b) 7 anos

c) 8 anos

d) 9 anos

e) 2 anos

30. (TTN) Carlos aplicou 1/4 de seu capital a juros simples comerciais de 18% a.a., pelo prazo de 1 ano, e o restante do dinheiro a uma taxa de 24% a.a., pelo mesmo prazo e regime de capitalização. Sabendo-se que uma das aplicações rendeu R$ 594,00 de juros, mais do que a outra, o capital inicial era de R$

a) 4.200,00

b) 4.800,00

c) 4.900,00

d) 4.600,00

e) 4.400,00

31. (TTN) Três capitais são colocados a juros simples: o primeiro a 25% a.a., durante 4 anos; o segundo a 24% a.a., durante 3 anos e 6 meses e o terceiro a 20% a.a., durante 2 anos e quatro meses. Juntos renderam um juro de R$ 27.591,80. Sabendo que o segundo capital é o dobro do primeiro e que o terceiro é o triplo do segundo, o valor do terceiro capital é de:

a) R$ 30.210,00

b) R$ 10.070,00

c) R$ 15.105,00

d) R$ 20.140,00

e) R$ 5.035,00

32. (TTN) Calcular a taxa que foi aplicada a um capital de R$ 4.000,00, durante 3 anos, sabendo-se que se um capital de R$ 10.000,00 fosse aplicado durante o mesmo tempo, a juros simples de 5% a.a., renderia mais R$ 600,00 que o primeiro. A taxa é de:

a) 8,0%

b) 7,5%

c) 7,1%

d) 6,9%

e) 6,2%

33. (MACK-SP) Três meses atrás, depositei na poupança R$ 10 000,00. No primeiro mês ela rendeu 1,6%, no segundo mês 1,0% e no terceiro mês 1,2%. Quanto tenho agora?

a) R$ 10.200,70

b) R$ 14.800,50

c) R$ 12.900,05

d) R$ 11.600,98

e) R$ 10 384,73

34. Para render juros de R$ 4 375,00 à taxa de 2,5% ao mês, devo aplicar meu capital de R$ 50 000,00 durante quanto tempo?

a) três meses

b) sete meses

c) oito meses

d) dois meses

e) 3,5 meses

35. (FGV) Um aparelho de TV é vendido por R$ 1.000,00 em dois pagamentos iguais, sem acréscimo, sendo o 1º como entrada e o 2º um mês após a compra. Se o pagamento for feito à vista, há um desconto de 4% sobre o preço de R$ 1.000,00. A taxa mensal de juros simples do financiamento é aproximadamente igual a:

a) 8,7%

b) 7,7%

c) 6,7%

d) 5,7%

e) 4,7%

36. A quantia de R$ 27 000,00, emprestada a 1,2% ao mês, quanto rende em 6 meses.

a) R$ 1 200,70

b) R$ 1 800,50

c) R$ 1 950,05

d) R$ 1 650,98

e) R$ 1 944,00

37. Um capital de $ 5 000,00, aplicado a juros a juros simples, à taxa mensal de 3%, por um prazo de 1 ano e 3 meses, produzirá um montante no valor de:

a) $ 7 225,00

b) $ 7 250,00

c) $ 7 320,00

d) $ 7 500,00

e) $ 7 550,00

38. Uma pessoa tem $ 20 000,00 para aplicar a juros simples. Se aplicar $ 5 000,00 à taxa mensal de 2,5% e $ 7 000,00 à taxa mensal de 1,8%, então, para obter um juro anual de $ 4 932,00, deve aplicar o restante à taxa mensal de:

a) 2%

b) 2,1%

c) 2,4%

d) 2,5%

e) 2,8%

39. (FGV-SP) No regime de juros compostos, a taxa de juro anual que produz um montante 44% superior ao capital inicial, no prazo de aplicação de dois anos é:

a) 20%

b) 21,5%

c) 21%

d) 20,5%

e) 22%

40. Um capital de R$ 1.000.000,00 foi aplicado a juros compostos, durante 1 ano, à taxa de 60% a.a. com capitalização mensal. Qual o montante dessa aplicação?

a) R$ 1.795.900,00

b) R$ 1.600.567,00

c) R$ 1.700.000,00

d) R$ 1.450.340,00

41. (FGV) O Sr. Vítor costuma aplicar suas economias num fundo que rende juros compostos. Se ele aplicar hoje R$ 10 000,00 e R$ 20 000,00 daqui a 1 ano, qual seu saldo daqui a 2 anos, se a taxa for de 15% a.a.?

a) R$ 12 200,70

b) R$ 15 800,50

c) R$ 12 950,05

d) R$ 17 650,98

e) R$ 36 225,00

42. Qual o montante de uma aplicação de R$ 1.000.000,00, a juros compostos, durante 6 meses à taxa de 36% a.a., capitalizados mensalmente?

a) R$ 1.167.066,00

b) R$ 1.450.597,00

c) R$ 1.194.100,00

d) R$ 1.190.340,00

43. Determine o prazo de uma aplicação de R$ 550.000,00, a juros compostos, capitalizados mensalmente, se desejo obter um montante de R$ 1 272 183,00, a taxa de juro de 15% a.m.

a) 2 meses

b) 3 meses

c) 4 meses

d) 5 meses

e) 6 meses

44. qual a taxa efetiva para que o capital de R$ 1.200.000,00, aplicado durante 1 ano, com capitalização mensal, atinja um montante de R$ 3.021.720,00?

a) 4% a.m.

b) 8% a.m.

c) 5% a.m.

d) 9% a.m.

e) 10% a.m.

45. Qual a taxa efetiva para que o capital de R$ 1.200.000,00, aplicado durante 1 ano, com capitalização mensal, atinja um montante de R$ 2.155.027,20.

a) 4% a.m.

b) 8% a.m.

c) 5% a.m.

d) 9% a.m.

e) 10% a.m.

46. O montante gerado por um capital de R$ 160.400,00, no fim de 5 anos, com juros de 40% a.a. capitalizados trimestralmente é de:

$(1+10\%)^{20}=6{,}7275$

a) R$ 1.079.090,84

b) R$ 2.079.090,84

c) R$ 3.079.090,84

d) R$ 4.079.090,84

e) R$ 5.079.090,84

47. (A.F. CAIXA) Quanto se deve investir hoje, à taxa nominal de juros de 20% ao no, capitalizados trimestralmente, para se obter R$ 100.000,00 daqui a 3 anos?

a) R$ 14 200,70

b) R$ 60 800,50

c) R$ 22 950,05

d) R$ 27 650,98

e) R$ 64 461,00

48. Qual o capital que produz o montante de R$ 750.000,00 vencível em 8 meses, a uma taxa de juros compostos de 5% ao mês é:

a) R$ 532.222,22

b) R$ 407.449,23

c) R$ 507.614,20

d) R$ 568.689,59

e) R$ 533.639,33

49. Qual o capital que aplicado a 10% a.m. durante 5 meses, produz um montante composto de R$ 1.610.510,00

a) R$ 1.000.000,00

b) R$ 1.500.000,00

c) R$ 1.800.000,00

d) R$ 1.300.000,00

e) R$ 1.100.000,00

50. Um capital foi aplicado a 5% ao mês de juros compostos e, após 4 meses de aplicação, a taxa foi elevada para 7% ao mês. Ao final de 10 meses de aplicação o valor do capital acumulado era de R$ 364.830,00. Qual o valor MAIS PRÓXIMO do capital aplicado?

a) R$ 200.000,00

b) R$ 350.000,00

c) R$ 300.000,00

d) R$ 400.000,00

e) R$ 450.000,00

Atividades extras para a prova

1. O preço à vista de uma geladeira é de R$ 1.000,00. Entretanto a mesma pode ser adquirida em 6 parcelas mensais e iguais, com o vencimento da primeira em 30 dias. Se a loja cobra 5%a/m de juros, quanto será cada prestação? (Resposta R$ 197,02)

2. O preço à vista de uma TV é de R$ 700,00. Pode-se levar esta TV com uma entrada de 25% do preço a vista e o restante financiado em 4 vezes. Se a loja cobra 6%a/m de juros, de quanto é cada parcela? (sistema postecipado) (Resposta R$ 151,51)

3. Para liquidar um empréstimo, uma pessoa deverá efetuar 12 pagamentos mensais iguais a R$ 199,04. O banco cobra de juros 8%a/m, calcule a quantia que a pessoa tomou emprestado. (Resposta R$ 1.500,00)

4. Quanto vai custar um fogão de R$ 1.000,00, se for cobrado 5%a/m, em 6 vezes, por mês, sendo a primeira no ato? (Resposta R$ 187,64)

5. Se eu comprar um aparelho de som de R$ 1.200,00 em 1+11 vezes, a uma taxa de juros de 4,3%a/m, quanto vou pagar por mês? (Resposta R$ 124,73)

6. Uma loja oferece um carro em 1+35 vezes de R$ 402,00. Sabe-se que os juros cobrados são de 2,5%a/m, quanto custa o carro? (Resposta R$ 9.706,35)

Currículo do professor-autor

Roberto José Medeiros Junior

Licenciado e Bacharel em Matemática pela Universidade Tuiuti do Paraná (1999), Especialista em Educação Matemática com ênfase em Tecnologias pela Universidade Tuiuti do Paraná (2001), Especialista em Educação à Distância (Tutoria a Distância) – EaD/FACINTER (2007) tem Mestrado em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (2007). Entre os anos de 1996 e 2008, atuou como professor de Matemática do Ensino Fundamental ao Médio da rede pública e privada e, desde 2003 vem atuando como professor no Ensino Superior, nos cursos de Licenciatura em Matemática, Física e Pedagogia, na modalidade presencial e a distância em instituições públicas e privadas com as disciplinas de Cálculo, Estruturas Algébricas, Estatística e Matemática Financeira. Entre os anos de 2003 e 2005 atuou como professor de Metodologia, Prática de Ensino e Estágio Supervisionado em Matemática na Universidade Federal do Paraná, nos cursos de Licenciatura em Matemática, Física e Pedagogia. Atualmente é professor de Matemática do Instituto Federal do Paraná na modalidade presencial e a distância. É um dos autores do Livro Didático Público de Matemática para o Ensino Médio do Estado do Paraná e, é também, autor de livros para a formação continuada do Centro Interdisciplinar de Formação Continuada de Professores (CINFOP), da Universidade Federal do Paraná. Prestador de serviços como assessor pedagógico em Educação Matemática para as escolas públicas (municipal e estadual) e as privadas também.