Matemática I

Roberto José Medeiros Junior

INSTITUTO FEDERAL
PARANÁ
Educação à Distância

Curitiba-PR
2011

Presidência da República Federativa do Brasil

Ministério da Educação

Secretaria de Educação a Distância

Este Caderno foi elaborado pelo Instituto Federal do Paraná para o Sistema Escola Técnica Aberta do Brasil - e-Tec Brasil.

Prof. Irineu Mario Colombo
Reitor

Profª. Mara Chistina Vilas Boas
Chefe de Gabinete

Prof. Ezequiel Westphal
Pró-Reitoria de Ensino - PROENS

Prof. Gilmar José Ferreira dos Santos
Pró-Reitoria de Administração - PROAD

Prof. Paulo Tetuo Yamamoto
Pró-Reitoria de Extensão, Pesquisa e Inovação - PROEPI

Neide Alves
Pró-Reitoria de Gestão de Pessoas e Assuntos Estudantis - PROGEPE

Prof. Carlos Alberto de Ávila
Pró-Reitoria de Planejamento e Desenvolvimento Institucional - PROPLADI

Prof. José Carlos Ciccarino
Diretor Geral de Educação a Distância

Prof. Ricardo Herrera
Diretor Administrativo e Financeiro de Educação a Distância

Profª Mércia Freire Rocha Cordeiro Machado
Diretora de Ensino de Educação a Distância

Profª Cristina Maria Ayroza
Coordenadora Pedagógica de Educação a Distância

Prof. Otávio Bezerra Sampaio
Profª. Marisela García Hernández
Profª. Adnilra Selma Moreira da Silva Sandeski
Prof. Helton Pacheco
Coordenadores do Curso

Izabel Regina Bastos
Patricia Machado
Assistência Pedagógica

Profª Ester dos Santos Oliveira
Jaime Machado Valente dos Santos
Profª Linda Abou Rejeili de Marchi
Revisão Editorial

Profª. Rosangela de Oliveira
Análise Didática Metodológica - PROEJA

Flavia Terezinha Vianna da Silva
Diagramação

e-Tec/MEC
Projeto Gráfico

Catalogação na fonte pela Biblioteca do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - Paraná

Apresentação e-Tec Brasil

Prezado estudante,

Bem-vindo ao e-Tec Brasil!

Você faz parte de uma rede nacional pública de ensino, a Escola Técnica Aberta do Brasil, instituída pelo Decreto nº 6.301, de 12 de dezembro 2007, com o objetivo de democratizar o acesso ao ensino técnico público, na modalidade a distância. O programa é resultado de uma parceria entre o Ministério da Educação, por meio das Secretarias de Educação a Distancia (SEED) e de Educação Profissional e Tecnológica (SETEC), as universidades e escolas técnicas estaduais e federais.

A educação a distância no nosso país, de dimensões continentais e grande diversidade regional e cultural, longe de distanciar, aproxima as pessoas ao garantir acesso à educação de qualidade, e promover o fortalecimento da formação de jovens moradores de regiões distantes, geograficamente ou economicamente, dos grandes centros.

O e-Tec Brasil leva os cursos técnicos a locais distantes das instituições de ensino e para a periferia das grandes cidades, incentivando os jovens a concluir o ensino médio. Os cursos são ofertados pelas instituições públicas de ensino e o atendimento ao estudante é realizado em escolas-polo integrantes das redes públicas municipais e estaduais.

O Ministério da Educação, as instituições públicas de ensino técnico, seus servidores técnicos e professores acreditam que uma educação profissional qualificada – integradora do ensino médio e educação técnica, – é capaz de promover o cidadão com capacidades para produzir, mas também com autonomia diante das diferentes dimensões da realidade: cultural, social, familiar, esportiva, política e ética.

Nós acreditamos em você!

Desejamos sucesso na sua formação profissional!

Ministério da Educação
Janeiro de 2010

Nosso contato
etecbrasil@mec.gov.br

Indicação de ícones

Os ícones são elementos gráficos utilizados para ampliar as formas de linguagem e facilitar a organização e a leitura hipertextual.

Atenção: indica pontos de maior relevância no texto.

Saiba mais: oferece novas informações que enriquecem o assunto ou "curiosidades" e notícias recentes relacionadas ao tema estudado.

Glossário: indica a definição de um termo, palavra ou expressão utilizada no texto.

Mídias integradas: sempre que se desejar que os estudantes desenvolvam atividades empregando diferentes mídias: vídeos, filmes, jornais, ambiente AVEA e outras.

Atividades de aprendizagem: apresenta atividades em diferentes níveis de aprendizagem para que o estudante possa realizá-las e conferir o seu domínio do tema estudado.

Sumário

Palavra do professor-autor

Este material foi elaborado a partir da experiência na educação presencial e a distância, buscando trazer de forma objetiva, simples e prática os principais conteúdos que serão importantes para seu exercício profissional.

Esperamos que através dos conteúdos contemplados neste material didático, somados às aulas expositivas e ao seu esforço pessoal, possamos quebrar, juntos, o paradigma de que a Matemática é uma disciplina "difícil, complicada" e transformá-la em uma disciplina de simples compreensão, útil e aplicável no seu cotidiano profissional.

Muito estudo e consequente sucesso nesta caminhada!

Prof. Roberto José Medeiros Junior

Aula 1 – Os números na civilização

Na primeira aula você irá compreender a importância da escrita numérica no nosso cotidiano.

O homem é um ser curioso, e como tal, procura investigar sobre tudo aquilo que o cerca. Investigação sugere criação e descoberta de novos padrões até então desconhecidos. Fique ligado quanto aos conceitos passados nessa aula.

O relacionamento da Matemática com as demais ciências sempre foi intenso e serviu para encorajar os cientistas a solucionar problemas reais. Veja-se, por exemplo, que sem a Matemática problemas como este não poderiam ser resolvidos:

> Salomão mandou fazer um altar de bronze, de nove metros de comprimento por nove de largura e quatro e meio de altura. Também mandou fazer um tanque redondo de bronze, com dois metros e vinte e cinco de profundidade, quatro metros e meio de diâmetro e treze metros e meio de circunferência. (BÍBLIA SAGRADA, II CRÔNICAS Cap. 04).

No decorrer das aulas veremos exemplos práticos das aplicações citadas.

Na **figura 1.1** podemos observar um Ishango. Ele é um instrumento de medida no centro da África criado, entre 25.000 a 20.000 mil anos, para realizar cálculos há 15 mil anos antes dos egípcios e 18 mil anos antes do surgimento da matemática na Grécia.

Fonte: http://cnncba.blogspot.com/2008/04/as-africanas-as-primeiras-matemticas.html

Figura 1.1 – Bastão de Ishango.
Fonte: www.sobre-historias-y-leyendas.com.

1.1 Panorama histórico da criação dos números

Nas **figuras 1.2** e **1.3** você encontra outras formas de contar na primeira a forma egípcia na segunda a romana.

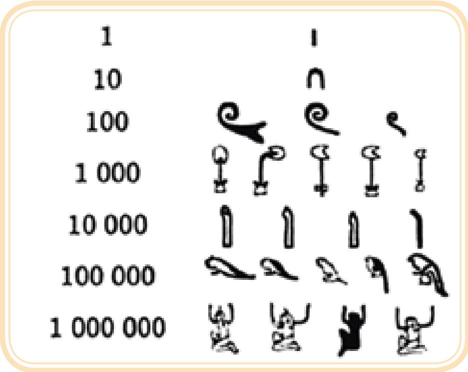


Figura 1.2 – Escrita egípcia dos números.
Fonte: www.sobre-historias-y-leyendas.com.

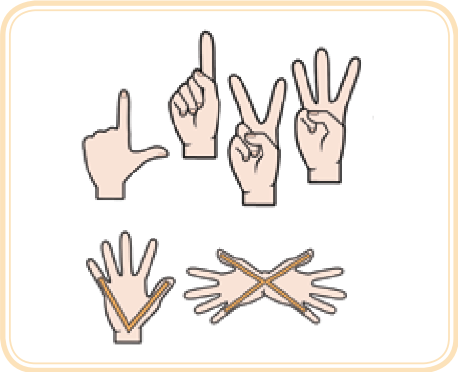


Figura 1.3 – Escrita romana dos números.
Fonte: www.smartkids.com.br.

Historicamente, o desenvolvimento da Matemática pode ser entendido a partir de dois fenômenos – a necessidade da contagem e o desenvolvimento da **agrimensura**.

A-Z

Agrimensor
Sua finalidade é o conhecimento cartográfico do solo e obras realizadas em sua superfície ou em seu subsolo. Garante a determinação do Estado na trama jurídica para fortalecer e melhorar o ordenamento territorial necessário para reforçar a proteção dos direitos da terra. Fornece informação espacial, que permite estabelecer o planejamento e implementação de políticas fundiárias.

Figura 1.4 – Profissional de agrimensura.
Fonte: http://4.bp.blogspot.com.

Muito antes de Cristo (3000 anos atrás, o que não é uma medida de tempo precisa), o homem se escondia dos animais selvagens e protegia-se da chuva e do frio, basicamente cuidava se sua subsistência, as famílias (se é que podemos caracterizá-las desta forma) eram pequenas, viviam em grutas e cavernas para se esconder.

O historiador matemático Georges Ifrah revela tal fato com bastante ênfase:

> De fato, por volta de 3000 a.C., esta civilização já se encontrava muito avançada, fortemente urbanizada e em plena expansão. Por razões estritamente utilitárias, motivadas principalmente por necessidades de ordem administrativa e comercial, ela toma pouco a pouco a consciência das possibilidades limitadas do 'homem–memória' e do 'esgotamento' de sua cultura exclusivamente oral. (IFRAH, 1997)

E para registrar os "contos", existia um tipo de escrita numérica?

Vamos imaginar uma criança, não alfabetizada, não letrada e que desconheça os nossos algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9). De que forma ela se expressa quando se trata de manifestar seus "contos", contos de fada, de super heróis, princesas, entre tantos outros personagens que aguçam a imaginação?

Não é preciso muito trato com o alfabeto e com os algarismos para representar, por exemplo, esta situação:

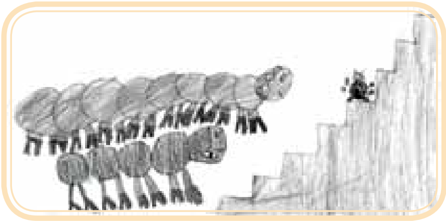


Figura 1.5 – Desenho infantil.
Fonte: www.cinfop.ufpr.br.

A história é de uma simpática Centopeia que foi a loja escolher sapatinhos. Imagine a situação que a Senhora Joaninha passou quando a Centopeia pediu para experimentar outro par de sapatos. (CAMARGO, M. As centopeias e seus sapatinhos. São Paulo: Ática, 1996).

O desenho foi feito por uma menina de sete anos. Deste modo podemos garantir que mesmo as crianças não letradas são capazes de registrar quantidades. No caso da centopeia, o fato de desenhar "muitos" pés é uma manifestação de correspondência entre os cem pés da centopeia e os "muitos" pés da centopeia.

Recentemente, segundo reportagem do *site* O Globo , as gravuras rupestres das Montanhas Altai, na Mongólia foram escolhidas pela Unesco – a agência da ONU para educação, ciência e cultura – como um dos 25 novos patrimônios da humanidade.

Para ler a reportagem na integra acesse http://oglobo.globo.com/ciencia/mat/2011/06/30/unesco-25-novos-patrimonios-da-humanidade-924808433.asp

Tais escritas representam a necessidade do homem se comunicar. No caso das pinturas rupestres, aparecem os pictogramas (representação através de desenhos), geralmente feitos nas paredes das cavernas. Através deste tipo de representação (pintura rupestre), trocavam mensagens, passavam ideias e transmitiam desejos e necessidades. Porém, ainda não era um tipo de escrita, pois não havia organização, nem mesmo padronização das representações gráficas, como ocorre nos sistemas atuais.

Figura 1.6 – Escritas rupestres.
Fonte: www.cidadesnanet.com.

1.2 A criação dos números

Na pescaria, por exemplo, o modo de contagem era um osso de lobo. A cada peixe tirado da água correspondia um risco no osso. O nome técnico para este procedimento é o da **correspondência biunívoca**.

A-Z

Correspondência Biunívoca
Na correspondência biunívoca lógica ou qualitativa, os elementos se correspondem univocamente em função de suas qualidades, como por exemplo, quando se analisam as semelhanças entre dois objetos (ou conjuntos de objetos) e, para isto, se estabelece a correspondência entre uma parte de um com a parte semelhante no outro. Por considerarem apenas as qualidades, as correspondências qualitativas independem da quantificação. Fonte: A Definição de Número: Uma Hipótese Sobre a Hipótese de Piaget - Clélia Maria Ignatius Nogueira – Universidade Estadual de Maringá - UEM.

A correspondência biunívoca pode ser facilmente entendida com a imagem seguinte:

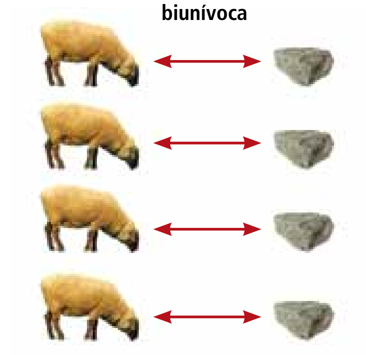


Figura 1.7 – Correspondência biunívoca.
Fonte: www.klickeducacao.com.br.

Mais ou menos há 10.000 anos, o homem começou a modificar bastante o seu sistema de vida. No lugar de apenas caçar, coletar frutos e raízes passou a cultivar algumas plantas e criar animais. Era o início da agricultura, conforme citado, a agrimensura foi um dos elementos relevantes ao aprimoramento do Sistema de Numeração.

Junto à necessidade de aprimorar o modo de medir, que estavam ligadas diretamente às atividades de plantar e criar animais, o homem passou então a fixar-se em determinado lugar, geralmente às margens de rios e lagos, formando as civilizações nômades.

Juntos homens e animais convivem em um mesmo espaço. Nas redondezas, a espreita, predadores aguardam o momento de garantir sua sobrevivência.

Deste modo, surge o que pode ser considerada uma "profissão": um pastor primitivo. Mas como controlar o rebanho? Como ter certeza de que nenhuma ovelha havia fugido ou sido devorada por algum animal selvagem?

O jeito foi apelar para a correspondência termo a termo. Um modo original de controlar seu rebanho, contando as ovelhas com pedras. Assim, cada ovelha que saía para pastar correspondia a uma pedra. O pastor colocava todas as pedras em um cesto. No fim do dia, à medida que as ovelhas entravam no cercado, o pastor ia retirando as pedras do cesto. No fim do dia, recolhia as suas ovelhas, mas e se sobrasse alguma pedra?

Esse pastor jamais poderia imaginar que, milhares de anos mais tarde, haveria um ramo na Matemática chamado cálculo, que em latim quer dizer "contas com pedras".

Foi contando objetos em correspondência com outros símbolos que a humanidade começou a construir o conceito de número.

> A Matemática surgiu inicialmente da necessidade de contar e registrar números. Até onde sabemos nunca houve uma sociedade sem algum processo de contagem ou fala numérica (isto é, associando uma coleção de objetos com algumas marcas facilmente manipuláveis, seja em pedras, nós ou inscrições, tais como marcas em madeira ou ossos). O objeto mais antigo, utilizado pelo homem para fazer registros de contagem, é o bastão de *Ishango*, um osso encontrado no Congo (África) em 1950, datado de 20000 a.C., possui marcas compatíveis a um sistema de numeração de base 10, é 18 mil anos mais antigo do que a matemática grega. (LOPES, *et al.*, 2006, p. 216)

Fonte: www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/livro_e_diretrizes/livro/matematica/seed_mat_e_book.pdf

Atualmente, os sistemas de numeração são importantes socialmente e economicamente em ações de qualquer natureza para a tomada de decisões que envolvem contagem.

Resumo

Nesta aula vimos de modo histórico, a criação dos números, do cálculo e a importância dos mesmos na sociedade.

Atividades de aprendizagem

1. Você conhece uma forma diferente de contagem? Explique.

2. Utilizando o conceito de correspondência biunívoca, ilustre um tipo de relação numérica que tenha essas características e seja voltada a sua área de atuação.

Anotações

Aula 02 – A noção de conjuntos numéricos

Nesta aula conheceremos um dos princípios elementares da matemática e do cálculo: a noção de conjunto e o nome dos principais conjuntos numéricos.

Consultando um dicionário define-se conjunto como sendo:

> "(Matemática) Grupo de elementos, finito ou infinito, que têm uma característica em comum".
>
> Fonte: http://dicionariorapido.com.br/conjunto/

Trata-se de uma definição primitiva, sendo assim necessitamos de alguns exemplos para elucidar a importância do conceito e de seu contexto.

Por exemplo: quais são os números pares? Os ímpares são consequência desta numeração?

2.1 Analisando o caso do baile

É natural contar!

Contar quantos são os pares em um baile e com isso formar uma representação formal de conjunto e uma representação gráfica é bastante simples, verifique:

Supondo que no baile existam 20 pessoas, formamos quantos pares?

Figura 2.1 – Baile.
Fonte: www.sxc.hu.

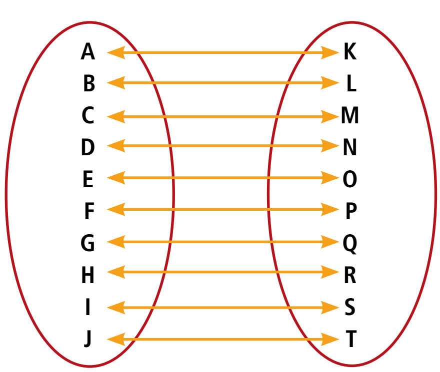


Figura 2.2 – Ideia de relação nos conjuntos.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Cada uma das dez ligações (relação biunívoca) representa um dos pares formados, ou seja, o número 20 (total de participantes do baile que é um conjunto finito) é um número que "forma dez pares".

Então como definir o conjunto dos números pares?

Toda a notação de conjunto inicia com uma letra maiúscula do alfabeto latino, deste modo pode-se chamar o conjunto dos números pares pela letra P (Pares).

$P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$

Além da letra maiúscula, vale lembrar-se das chaves e das reticências para representar um conjunto infinito.

Pode-se representar os números pares, também através de uma generalização, fórmula geral ou lei de formação.

Existem diversos métodos bastante intuitivos para determinar se um número é par ou ímpar. Talvez o mais fácil deles seja fundamentado na observação do último algarismo do número que se deseja saber se é par ou ímpar: **No caso de o último algarismo do número ser divisível por dois, isto é, se o resto da divisão do mesmo por dois for igual a zero então o número é par, caso contrário, é ímpar.**

Exemplos:

$8 \div 2 = 4 \rightarrow r = 0$, sendo assim a divisão por dois foi exata, então é divisível por dois, é par!

$64 \div 2 = 32 \rightarrow r = 0$, sendo assim a divisão por dois foi exata, então é divisível por dois, é par!

$9 \div 2 = 4 \rightarrow r = 1$, sendo assim a divisão por dois **não** foi exata, então **não** é divisível por dois, **não** é par!

$27 \div 2 = 13 \rightarrow r = 1$, sendo assim a divisão por dois **não** foi exata, então **não** é divisível por dois, **não** é par!

E o zero? É par ou **não**?

Observação importante sobre o zero:

- O zero é um número par. Esta afirmação é feita devido às seguintes razões:
  - Zero é um número inteiro múltiplo de dois, isto é, ele pode ser escrito na forma 2x;
  - Zero elementos podem ser divididos em dois grupos com um número igual de elementos;

2.2 Os principais conjuntos numéricos e seus elementos

2.2.1 Conjunto dos números naturais (IN)

Os números naturais são aqueles usados para contar. É natural contar, mas quais são esses números?

São todos os números inteiros (não tem vírgula) e são não-negativos.

IN = {0, 1, 2, 3, ...}

Em alguns contextos, no conjunto dos números naturais, o zero não é considerado como um número natural, pois não faz sentido contar nada. Quando o símbolo dos números naturais (IN) vier seguido de um asterisco (*) tira-se o zero do conjunto:

IN* = {1, 2, 3, ...}

2.2.2 Conjunto dos números inteiros (Z)

Os números inteiros são formados pelos números naturais {0, 1, 2, 3, ...} mais os seus simétricos {-1, -2, -3, ...}. Dois números são simétricos se, e somente se, sua soma é zero.

O conjunto de todos os números inteiros é denotado pela letra Z (do alemão: *zahlen* que quer dizer número em alemão)

Tal conjunto é importante para responder a questões como: de oito tirei doze, com quanto fiquei? Se preferir 8 – 12 = ?

Somente com os números naturais não seria possível responder a essa pergunta.

Historicamente o zero foi o último número a ser inventado e o seu uso matemático parece ter sido criado pelos babilônios. Sabemos que o zero apareceu para representar no sistema decimal/ posicional a dezena, centena, milhar, ou seja, números cada vez maiores utilizando um tipo de sistema mais adequado às necessidades do homem. Os documentos mais antigos conhecidos onde aparece o número zero, não são anteriores ao século III a.C. Ao que se sabe, os maias foram um dos poucos povos a adotar o algarismo zero, que tinha a forma oval ou de um olho, seu sistema de numeração era posicional e usava a base 20. Um dos grandes problemas matemáticos do homem começou a ser a representação de grandes quantidades. A solução para isto foi instituir uma base para os sistemas de numeração.
(LOPES, *et al.*, 2006, p. 216)
Fonte: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/livro_e_diretrizes/livro/matematica/seed_mat_e_book.pdf

Z = { ..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...}

Tal definição fica mais fácil de ser visualizada através de uma reta orientada:

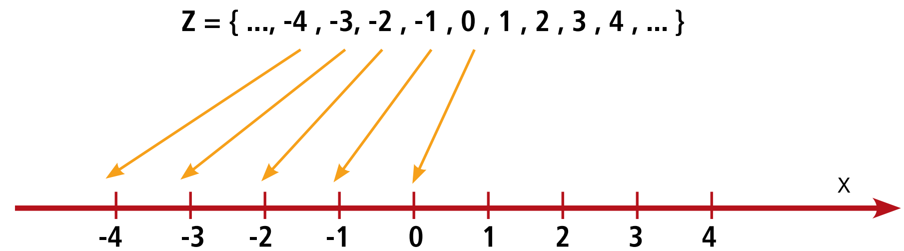


Figura 2.3 – Reta orientada.
Fonte: http://www.cefetrn.br/~assis/conjuntos/conjuntos1.html

Observações:

- O conjunto IN é subconjunto de Z.
- Temos também outros subconjuntos de Z:
  - Z+ = conjunto dos inteiros positivos = {1, 2, 3, 4, 5,...}
  - Z- = conjunto dos inteiros negativos = {-1, -2, -3, -4, -5,...}
  - Observe que Z+= IN.

2.2.3 Conjunto dos números racionais (Q)

Os números racionais são todos aqueles que podem ser colocados na forma de uma razão, ou seja, representação fracionária (com o numerador sendo um número inteiro e o denominador um inteiro diferente de zero).

Todos os racionais tem como resultado um quociente, daí a escolha pela letra Q ser a mais indicada.

$$Q = \{ \ldots; \frac{5}{8}; 7{,}5; -9; 3\frac{5}{8}; \sqrt[2]{4}; -\frac{6}{7}, \ldots\}$$

Ou seja, o conjunto dos números racionais é a união do conjunto dos números inteiros com as frações positivas e negativas.

Exemplos de que os números inteiros podem ser representados como uma razão:

a) $-3 = -\frac{3}{1} = -\frac{6}{2} = -\frac{9}{3}$

b) $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$

Assim, podemos criar uma lei de formação do conjunto dos números racionais:

$Q = \{ x \mid x = \frac{a}{b}$, com $a \in Z, b \in Z$ e $b \neq 0 \}$

É interessante considerar a representação decimal de um número racional que se obtém dividindo numerador ‘a’ por denominador ‘b’.

$\frac{1}{2} = 0{,}5$ $\qquad -\frac{5}{4} = -1{,}25$ $\qquad \frac{75}{20} = 3{,}75$

Exemplos referentes às dízimas exatas ou finitas:

$\frac{1}{3} = 0{,}333...$ $\qquad \frac{6}{7} = 0{,}857142857142...$ $\qquad \frac{7}{6} = 1{,}1666...$

Toda dízima exata ou periódica pode ser representada na forma de número racional.

Podemos representar por meio de um diagrama os conjuntos que vimos até agora:

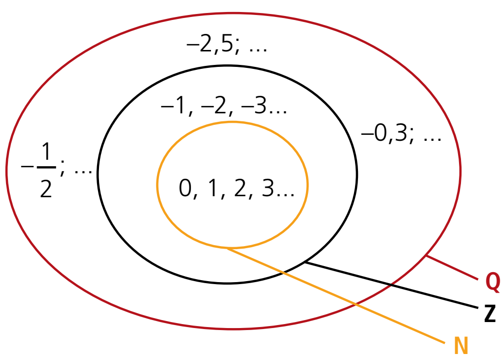


Figura 2.4 – Diagrama dos conjuntos N, Z e Q.
Fonte: www.brasilescola.com.

2.2.4 Conjunto dos números irracionais

Os números irracionais são dízimas infinitas não periódicas, ou seja, os números que não podem ser escrito na forma de um número racional (divisão de dois inteiros).

São exemplos de números que não podem ser representados como uma razão (fração):

$\sqrt{2} = 1{,}4142135...$

$\sqrt{3} = 1{,}7320508...$

Saiba como calcular o valor de PI e analisar o seu padrão através do exemplo prático de construção: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/livro_e_diretrizes/livro/matematica/seed_mat_e_book.pdf

Um número irracional bastante conhecido é o número (pi) $\pi = 3{,}1415926535...$

Outro número, chamado até mesmo de transcendente, é o número phi (ϕ) ou número de ouro:

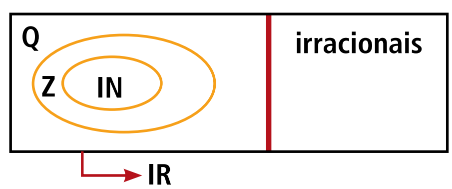
$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989$$

> A Geometria tem dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras, o outro é a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro e o segundo podemos chamar-lhe a joia preciosa. (KEPLER, 1571-1630)

2.2.5 Conjunto dos números reais (IR)

Dados os conjuntos dos números racionais (Q) e dos irracionais, definimos o conjunto dos números reais como:

O diagrama seguinte mostra a relação entre os conjuntos numéricos:



Portanto, os números naturais, inteiros, racionais e irracionais são todos números reais.

Entre dois números inteiros existem infinitos números reais.

Exemplo:

Entre os números 1 e 2 existem infinitos números reais:

1,01 ; 1,001 ; 1,0001 ; 1,1 ; 1,2 ; 1,5 ; 1,99 ; 1,999 ; 1,9999 ...

A reta numérica seguinte representa a questão de que entre dois números naturais existem infinitos números reais:

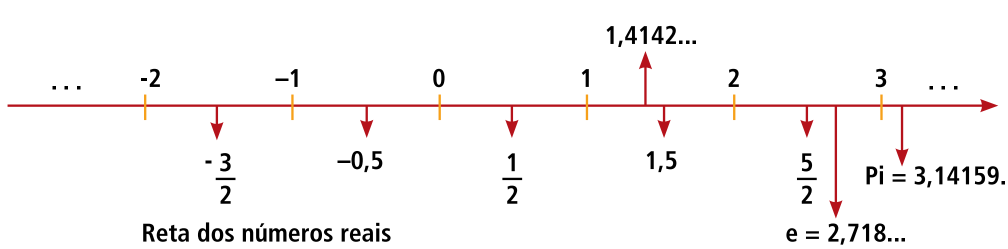


Figura 2.5 – Imagem da reta numérica real.
Fonte: www.matematicadoensinofundamentalemedio.com

Resumo

Os principais conjuntos numéricos:

- **Números Naturais:** {1, 2, 3, 4, 5,......,11, 12,.....}
- **Números Inteiros:** {...., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,...}
- **Sequências:** {0, 1, 2,....,10, 11, 12, 13,...}
- **Números Racionais:** {p/q | p e q são números inteiros , q = 0}; os conjuntos de números naturais , números inteiros e sequenciais , assim como os números que podem ser grafados em frações, são subconjuntos dos números racionais.
- **Números Irracionais:** {x|x é um número real, mas não um número racional }; os conjuntos de números racionais e irracionais não tem elementos em comum e por isso são conjuntos desarticulados.
- **Números Reais:** {x|x é a coordenada de um ponto em uma linha numérica}; a união do conjunto de números racionais com um conjunto de números irracionais equivale ao conjunto de números reais.

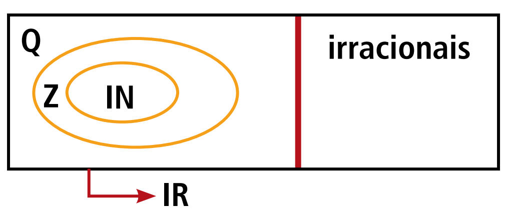


Figura 2.6 – Representação dos conjuntos de modo resumido.
Fonte: elaborado pelo autor.

Atividades de aprendizagem

A ideia de formalizar as características de cada conjunto numérico é importante para sistematizar e ampliar o modo, técnicas e artifícios matemáticos no âmbito da evolução da ideia de relação e de correspondência entre objeto e número.

Sendo assim, escolha um tipo de objeto e faça a correspondência do número com o objeto, classificando-o de acordo com o conjunto numérico correspondente.

Exemplo:

O objeto balança mede a massa de objetos, sendo que tais medidas são apresentadas no visor da balança na forma de números com vírgula, por exemplo, um peixe “PESA” 1,250 kg. O número 1,250 faz parte do conjunto dos números racionais.

Anotações

Aula 3 – As operações fundamentais da Aritmética

Nesta aula serão apresentadas as quatro operações mais usuais de cálculos aritméticos: Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão.

Fique atento aos conceitos dessas aulas, pois por meio dessas operações poderemos compreender melhor as operações com frações, analisar e interpretar as informações transmitidas nos enunciados dos problemas de matemática e compreender problemas de geometria.

A habilidade em fazer cálculos "de cabeça" é bem antiga. A Matemática surgiu inicialmente da necessidade de contar e registrar números. Difícil imaginar uma sociedade sem algum processo de contagem ou de associação de objetos com algumas marcas facilmente manipuláveis seja em correspondência com pedras, nós ou riscos em madeira ou ossos.

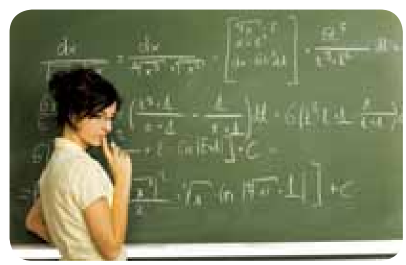


Figura 3.1 – Quadro com cálculos matemáticos.
Fonte: www.matematiques.com.br.

3.1 Você já imaginou a vida em sociedade sem os números e o calendário?

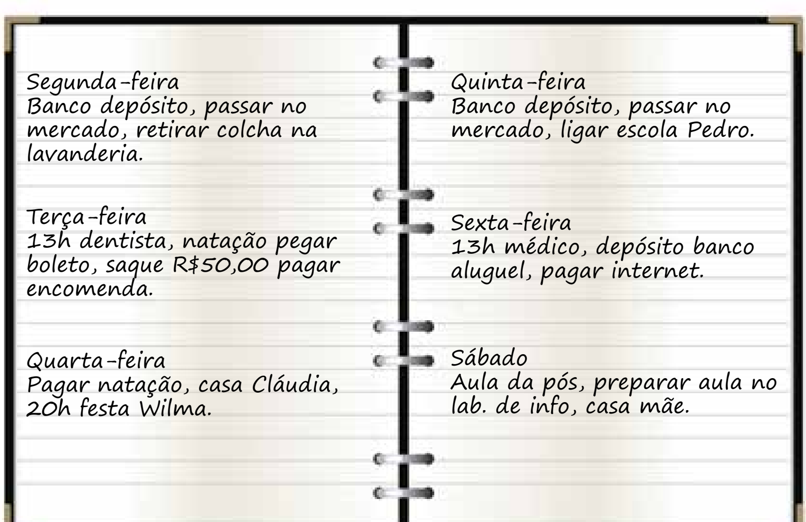


Figura 3.2 – Agenda de compromissos.
Fonte: www.sxc.hu.

Figura 3.3 – Agenda de compromissos no telefone celular.
Fonte: http://forum.zwame.pt.

Dá para dizer que muito do que foi desenvolvido até o presente momento, não só de tecnologia, mas a organização das atividades humanas se deve ao constante diálogo entre as diferentes linguagens e o senso numérico.

Uma habilidade interessante que só os seres humanos desenvolveram ao longo de sua existência é o cálculo mental. Fazer conta "de cabeça" pode ser mais interessante do que recorrer à tecnologia das calculadoras, celulares com calculadoras, ou mesmo lápis e papel.

Figura 3.4 – Calculadora.
Fonte: www.sxc.hu.

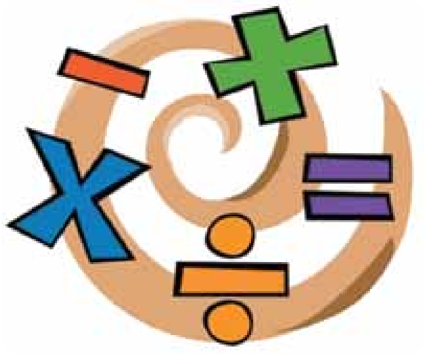


Figura 3.5 – As quatro operações.
Fonte:http://reforconoecerj.blogspot.com.

Podemos começar com problemas cotidianos, geralmente quando estamos no meio de uma conversa e não dispomos de lápis e papel, muito menos de calculadora esse tipo de habilidade ajuda.

A-Z

Trasladar
(*traslado* + *-ar*) *v. tr.*
1. Transportar de um lugar para outro. = MUDAR, TRANSFERIR.

Vamos começar com **contas de subtrair**, usando a técnica da **translação**.

Por exemplo, subtrair 34 de 61 é o mesmo que subtrair 30 de 57 (veja, estamos transladando os dois números para a esquerda de quatro unidades) ou, ainda, o mesmo que subtrair 40 de 67 (agora somamos 6 unidades a ambos os números). Em ambos os casos, é fácil ver que a diferença é 27.

Outro cálculo:

Meu bisavô nasceu em 1872 e faleceu em 1965. Quantos anos ele viveu?

Por que pegar lápis e papel para fazer a conta? Use a técnica da translação, assim: a diferença entre 1965 e 1872 é a mesma que entre 1963 e 1870. Ora, de 1870 a 1900 são 30 anos; a estes somo os 63 que vão de 1900 a 1963.

Portanto, ele viveu 93 anos.

Te outro modo de fazer? Sim, vários... Você e seu professor podem discutir sobre os diferentes modos de se fazer um cálculo mental.

Podemos raciocinar assim:

1965 – 1872 = 165 – 72 = 163 – 70 = 63 + 30 = 93.

Outro modo que parece ser mais fácil por conta das centenas (contar de 100 em 100 é mais fácil do que contar de 99 em 99, por exemplo) é fazer assim:

De 1965 a 1972 (quando meu bisavô completaria 100 anos de idade) são sete anos. Então ele viveu 100 – 7 = 93 anos. Fácil, não?

Outro modo: de 1872 a 1962 são 90 anos, pois só faltam mais 10 para chegar a 100 anos em 1972. Note, apelar para a centena fica mais fácil; sendo assim aos 90 acrescento três para chegar a 1965, obtendo os 93 anos.

Outra situação semelhante seria:

Em 1942 meu avô completou 70 anos. Em que ano ele nasceu?

Somo 30 a 1942 e obtenho 1972, quando meu avô completaria 100 anos; logo, ele nasceu em 1872, ou seja, 100 anos antes.

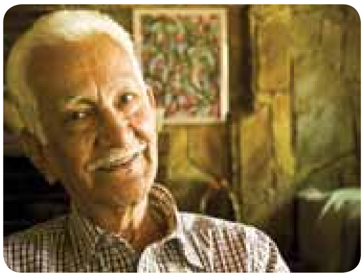


Figura 3.6 – A boa idade.
Fonte: www.sxc.hu.

Outro modo: se o ano fosse 1940, "voltaria" 40 anos ao ano de 1900, do qual volto mais 30 e chego a 1870; agora somo os dois anos que tirei no início e chego ao ano do nascimento de meu avô: 1872.

Natural fazer contagem, não é? Pois é exatamente o nome dado a esse tipo de conjunto: **Números Naturais**, os números usados para contar.

3.2 Contas de somar

Quando usamos a técnica da translação nas contas de subtrair, temos de aumentar ou diminuir os dois números, simultaneamente, da mesma quantidade. No caso da soma aumentamos um e diminuímos o outro da mesma quantidade. Por exemplo, somar 47 com 39 é o mesmo que somar 46 com 40, ou 50 com 36, resultando em 86. Somar 143 com 234 é o mesmo que somar 140 com 237, que é o mesmo que 40 + 337, que é 377; mas tudo isso "de cabeça", nada de lápis e papel.

Para pensar e resolver

A rampa que dá acesso ao Palácio do Planalto, em Brasília tem, por estimativa, aproximadamente quatro metros de altura na sua parte mais alta. Tendo começado a subi-la, uma pessoa nota que, após caminhar 12,3 metros sobre a rampa, está a 1,5 metros de altura em relação ao solo. Quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa.

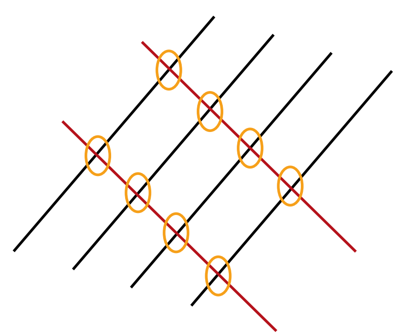
Figura 3.7 – Rampa do Planalto.
Fonte:http://upload.wikimedia.org.

(Adaptado do vestibular da UNICAMP, ano 2007)

3.3 Contas de multiplicar

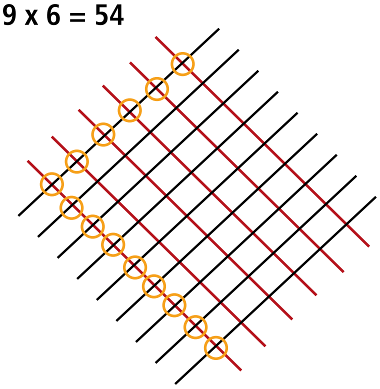
Por que o símbolo de multiplicar é o X?

4 x 2 = 8



4 + 4 = 8

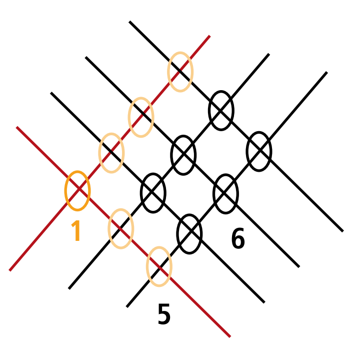
9 x 6 = 54



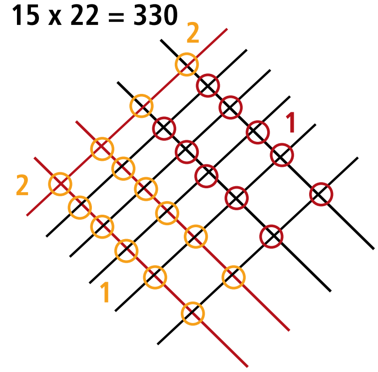
9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 54

Para multiplicações maiores, fazemos da mesma maneira, cruzando retas. Por isso "vezes" é um X, retas que se cruzam, também conhecido como método chinês:

12 x 13 = 156



15 x 22 = 330



O fato é que depois de termos entendido o mecanismo da multiplicação, o domínio da tabuada passa a ser fundamental para a velocidade dos cálculos. O trabalho de decorar a tabuada, neste caso, é amplamente recompensado.

De modo geral, multiplicam-se mais facilmente números com mais de um dígito trabalhando-se da esquerda para a direita. Assim, quando temos um número de dois dígitos multiplicado por outro de apenas um dígito, começamos multiplicando as dezenas, depois as unidades e em seguida somamos os resultados.

$$
\begin{array}{rrcl}
12 \times 13 = & & & 10 + 2 \\
 & & & 10 + 3 \\
\hline
 & & & 30 + 6 \\
 & 100 + 20 & & \\
 & \multicolumn{3}{l}{100 + 50 + 6} \\
\hline
 & \multicolumn{3}{l}{1 \quad 5 \quad 6}
\end{array}
$$

Figura 3.8 – multiplicação separando dezenas de unidades.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Por exemplo: quanto dá 32 x 385?

De "cabeça" multiplique as dezenas, depois as unidades. No exemplo dado 32 x 385, tem-se três dezenas (3 x 10 = 30) e duas (2 x 1 = 2) unidades para multiplicar por 385.

Você pode multiplicar as três dezenas desta forma: 3 x 385, que é igual a 1155, mas multiplicamos 3 dezenas, para tanto acrescentamos o zero à direita do resultado, tem-se então: 11550. Pronto, está multiplicado 30 vezes, aí e só multiplicar as duas unidades que dá 385 x 2 = 770. Somando 11550 das dezenas com 770 das unidades, terá o total de: 12320.

Outro exemplo:

a) 34 X 7 = 30 X 7 + 4 X 7 = 210 + 28 = 238;

b) 47 X 6 = 40 X 6 + 7 X 6 = 240 + 42 = 282.

Aqui temos a possibilidade de decompor um dos números **fatorando**.

Ex.:

a) 46 X 42 = 46 X (7 X 6) = (46 X 7) X 6 = 322 X 6 = 1932

b) 57 X 24 = 57 X 8 X 3 = 456 X 3 = 1368

A-Z

Fatoração
O conceito de **fatoração** vem justamente desse procedimento de transformarmos um número em **fatores**, isto é, em números que se multiplicam. Se esses números não forem primos, poderão ser transformados em nova uma multiplicação de outros dois números permitindo a construção de um jogo de cálculo mental. Fonte: http ://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:IAJ8S5q67JAJ:educacao.uol.com.br/matematica/fatoracao.jhtm+conceito:fatorando&cd=1&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br&source=www.google.com.br

Saiba mais

Seguem algumas sugestões de procedimentos mentais para a multiplicação:

Multiplicar por cinco:

Divida por dois e coloque um zero (multiplica-se por 10) depois do resultado.

Exemplos:

a) $14 \text{ X } 5 = \frac{14}{2} = 7 \rightarrow 7 \text{ X } 10 = 70$;

b) $22 \text{ X } 5 = \frac{22}{2} = 11 \rightarrow 11 \text{ X } 10 = 110$.

Multiplicar por nove:

Multiplique o número por 10 e depois subtraia o próprio número:

Exemplos:

a) $14 \text{ X } 9 = 14 \text{ X } 10 = 140 \rightarrow 140 - 14 = 126$;

b) $23 \text{ X } 9 = 23 \text{ X } 10 = 230 \rightarrow 230 - 23 = 207$.

Para multiplicar um número por 10:

Adicione um zero ou "ande" com a vírgula para a direita do número. (na verdade não é a vírgula que anda, mas os algarismos que mudam de posição nas centenas, dezenas e unidades)

Exemplos:

a) 55 x 10 = 550;

b) 5,5 x 10 = 55.

Multiplicar por 11 um número de dois dígitos:

Separe os dígitos e coloque a soma deles no meio:

Exemplos:

a) 27 X 11 = 2 (?) 7 → 2 + 7 = 9 → 297;

b) 76 X 11 = 7 (?) 6 → 7 + 6 = 13 (neste caso colocamos o número que está na casa das unidades da soma entre sete e seis), 736 e somamos um a dígito da casa das centenas (7) = 836.

Multiplicar por 12:
Primeiro multiplique o número por 10, depois, multiplique-o por dois e some:

Exemplos:

a) 25 X 12 = 25 X 10 = 250, 25 X 2 = 50, 250 + 50 = 300;

b) 16 X 12 = 16 X 10 = 160, 16 X 2 = 32, 160 + 32 = 192.

Multiplicar por 15:
Multiplique por 10 e some a metade:

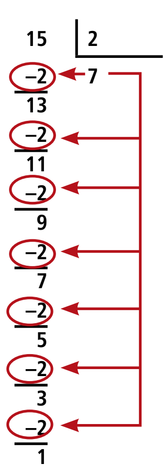
a) 8 X 15 = 8 X 10 = 80, 80/2 = 40, 80 + 40 = 120;

b) 12 X 15 = 12 X 10 = 120, 120/2 = 60, 120 + 60 = 180.

3.4 Contas de dividir

A divisão é a subtração de parcelas iguais. Da mesma maneira que a multiplicação representa a repetição de parcelas iguais, na divisão temos a repetição de retiradas sucessivas:

Exemplo:



Tiramos sete vezes dois de quinze

D = d x q + r
15 = 7 x 2 + 1

Figura 3.9 – Conta de dividir por subtrações sucessivas.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Além do algoritmo da divisão com subtrações sucessivas, podemos recorrer ao cálculo por estimativas e aproximações de base 10:

Exemplo:

Procurar o múltiplo de 10 mais próximo:

a) 154: 2 = (150 + 4): 2 = 150: 2 + 4: 2 = 75 + 2 = 77

b) 118: 2 = (120 - 2): 2 = 120: 2 - 2: 2 = 60 - 1 = 59

Ou ainda fazer simplificações sucessivas: (simplificação de frações)

a) 180: 12 = 90: 6 = 30: 2 = 15 equivalem à notação:

$$\frac{180}{12} = \frac{90}{6} = \frac{30}{2} = 15$$

b) 104: 8 = 52: 4 = 26: 2 = 13 equivalem à notação:

$$\frac{104}{8} = \frac{52}{4} = \frac{26}{2} = 13$$

Multiplicar pelo inverso da operação desejada:

a) 45 : 0,5 = 45 x 2 = 90

b) 25 : 0,2 = 25 x 5 = 125

Importante

Para ajudar com os cálculos de matemática, PENSE NISSO:

1. Ao estimular o cálculo mental, fique a vontade em usar papel e lápis, sobretudo no início do trabalho. Para entender uma estratégia, nada melhor do que registrá-la passo a passo em um caderno específico para os cálculos de matemática.

2. Cálculo mental não é fazer contas de cabeça utilizando os procedimentos tradicionais, mas sim buscar alternativas de cálculo mais elaboradas, e de preferência elaboradas por você.

3. A repetição exagerada de exercícios não ajuda a desenvolver o cálculo mental e tão pouco a inteligência. Por isso, listas intermináveis de contas devem ser evitadas. Do contrário as calculadoras seriam geniais!

4. Os procedimentos de cálculo mental devem ser fruto de descobertas pessoais. Por isso, estimule a troca de ideias entre seus colegas e tutor.

5. Não se faz cálculo mental sem o domínio de operações básicas, como adicionar dois números quaisquer menores do que dez. Se for necessário treine tais operações oralmente com a sua família ou colegas de sala.

6. Não exija de si mesmo resoluções com tempo marcado. A velocidade nos cálculos deve ser uma consequência e não um objetivo.

Estes são alguns processos de cálculo mental para as operações elementares, existem outros que não foram mencionados que podem ser discutidos entre os colegas e o seu tutor.

Resumo

Nesta aula vimos técnicas de cálculo mental para as quatro operações fundamentais da Aritmética: soma, subtração, multiplicação, e divisão. Há muitas técnicas de cálculo mental, o melhor é aquele que você compreende e executa com facilidade. Só o treino desenvolve a habilidade com os cálculos matemáticos.

Atividades de aprendizagem

1. Explique o calendário de pesca da sua comunidade. Ou seja, como vocês marcam os tempos importantes do trabalho na pesca?

2. Nesta aula abordamos diferentes maneiras de somar, subtrair, multiplicar e dividir. Você conhece mais algum jeito diferente de realizar as quatro operações? Escolha uma ou mais operações e mostre aos seus colegas como faz e se é diferente das apresentadas.

Anotações

Aula 04 – Operações fundamentais: a potenciação

Veremos agora um tipo mais específico de representação de multiplicações sucessivas: a potenciação.

Definimos a multiplicação como série de adições sucessivas e a divisão como série de subtrações sucessivas. Trata-se de se identificar padrões que facilitam os cálculos e melhoram a representação dos números em sistemas mais complexos, que envolvem mais de uma operação.

De maneira análoga, a potenciação é definida como modo de representar multiplicações sucessivas. De início vamos buscar o conceito de potenciação na área de superfícies planas, em especial a medida padrão de área: o metro quadrado, representado por m^2.

A potenciação do número inteiro **a**, é definida como o produto de **n** fatores iguais. O número **a** é denominado por **base** e o número **n** é o **expoente** e a notação usual é feita da forma: a^n onde a é multiplicado por a '*ene*' vezes.

Dados dois números naturais, a e n (com n>1), a expressão **n x a** representa o produto de n fatores igual ao número a, ou seja:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \ldots \times a \times a}_{\text{n fatores}}$$

Exemplos:

a) $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

b) $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$

Quando o expoente é dois, a potência a^2 pode ser lida como "a elevado ao quadrado", quando o expoente é três, a potência a^3 pode ser lida como "a elevado ao cubo". Tais leituras são provenientes do fato que a área do quadrado pode ser obtida por $A = a^2$, onde a corresponde à medida do lado do quadrado, e o volume do cubo pode ser obtido por $V= a^3$, onde a corresponde a medida da aresta do cubo.

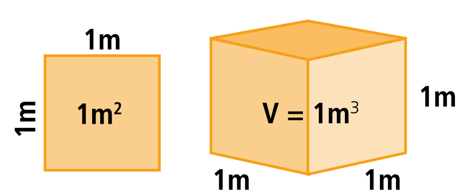


Figura 4.1 – Área e volume.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Alguns exemplos práticos:

A figura seguinte é a planta baixa de um sobrado residencial. Além de dois banheiros retangulares, o sobrado dispõe de cozinha quadrada com área de 4 m², além de sala de estar com área de 9 m². Quanto mede:

a) Os lados da cozinha?

b) Os lados da sala?

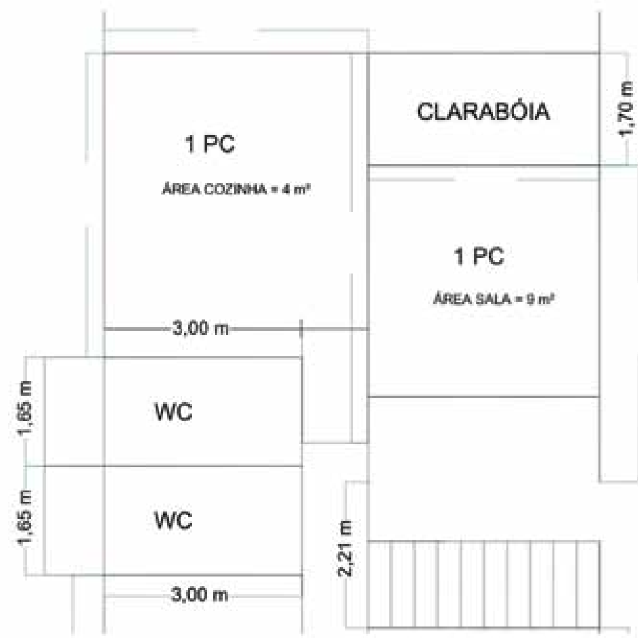


Figura 4.2 – Planta baixa de uma residência.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Propriedades da potenciação:

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Multiplicação de potências de mesma base: conserva a base e soma os expoentes.

2. $a^m : a^n = a^{m-n}$

Divisão de potências de mesma base: conserva a base e subtrai os expoentes.

3. $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Potência de potência, multiplicar os expoentes.

Exercícios resolvidos:

a) $4^2 \times 4^3 = 4^{2+3} = 4^5$

b) $10^4 : 10^2 = 10^{4-2} = 10^2 = 100$

c) $(6^3)^2 = 6^{3 \times 2} = 6^6$

Para resolver questões práticas, que tratam de áreas, pode-se lançar mão de outra representação matemática: a radiciação.

Atividades de aprendizagem

1. A potenciação é utilizada, por exemplo, para contar de modo mais rápido o crescimento (reprodução) de bactérias, observe:

   $1 \rightarrow 2^0$
   $2 \rightarrow 2^1$
   $4 \rightarrow 2^2$
   $8 \rightarrow 2^3$
   (...)

   Você pode apresentar outro exemplo prático da utilização da potenciação? Pesquise e elabore esquema semelhante ao das bactérias.

Aula 05 – Operações fundamentais: a radiciação

No exemplo prático citado a área da cozinha do sobrado era 4 m², ou seja, a questão é: qual a medida dos lados de um quadrado de área quatro? Assim desejamos conhecer a origem (medidas dos lados) desse quadrado. No grego, a palavra origem pode ser entendida como *radix*, que em termos mais usuais é a raiz do número, representada pelo símbolo: $\sqrt{\;}$.

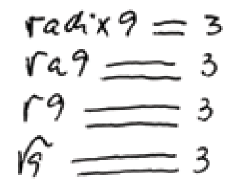


Figura 5.1 – Representação feita pelos copistas, século XV.
Fonte: Elaborado pelo autor.

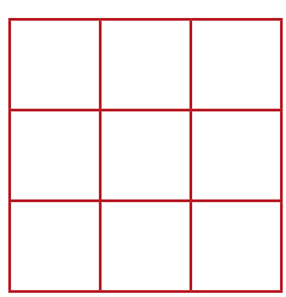
Nem sempre foi assim a palavra raiz passou por várias formatações, até que os copistas chegaram a um consenso de que a forma a ser utilizada era tão somente o símbolo $\sqrt[y]{x}$.

Onde o 'y' chama-se índice da raiz; 'x' é o radicando e o conjunto será o radical.

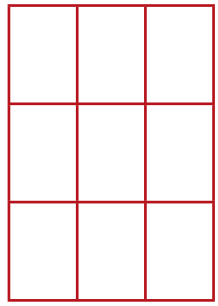
Exemplo prático:

Para a sala de estar da residência da **figura 4.2** tem-se o seguinte:

O Lado (*radix*) do quadrado de área 9 é igual a 3. Isto se a sala fosse quadrada, assim:



Mas, pelo que indica na planta baixa do projeto da residência, a sala é retangular, sendo assim, as opções de medidas dos lados **não podem ser descobertas por meio da raiz quadrada.**



Pode ser que as dimensões da sala no formato retangular sejam:

$2{,}5\text{m} \times 3{,}6\text{m} = 9\ \text{m}^2$

$2{,}89\text{m} \times 3{,}11\text{m} \approx 9\text{m}^2$

Note que as raízes servem para encontrar, por exemplo, a medida do lado de uma figura no formato quadrado, onde ambas as dimensões (largura e comprimento) são iguais.

5.1 Os números quadrados

Vejamos os números quadrados, representações figuradas de conjuntos de objetos que apresentam coleções onde o número de objetos da largura é o mesmo que do comprimento:

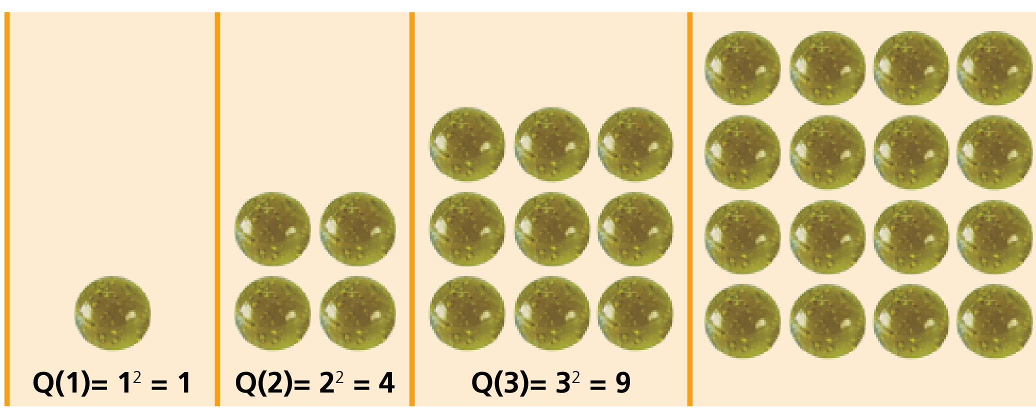


Figura 5.1 – Números quadrados perfeitos.
Fonte: http://www.atractor.pt/mat/numeros/quadrados/index.html. Adaptado.

- Quantas bolinhas terão a quarta figura?
- Qual a representação em termos de potência? E de radiciação?

Relembrando as propriedades da radiciação:

1. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[m:p]{a^{m:p}}$

2. $\sqrt[s]{a^r} = \sqrt[sp]{a^{rp}}$

3. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

4. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

5. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

6. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

7. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Exercícios resolvidos:

1. $\sqrt[8]{9^4} = \sqrt[2]{9^1} = \sqrt{9} = 3$

2. $\sqrt[3]{4} = \sqrt[9]{4^3}$

3. $\sqrt{9 \times 16} = \sqrt{9} \times \sqrt{16} = 3 \times 4 = 12$

4. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$

5. $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^1} = \sqrt{4} = 2$

6. $\sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^2 \times 2^4} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$

7. $\sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{2} = \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{8}{2}} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$

8. $(\sqrt[4]{6})^5 = \sqrt[4]{6^5} = \sqrt[4]{6^4} \times \sqrt[4]{6} = 6 \times \sqrt[4]{6}$

9. $\sqrt[3]{6 \times \sqrt[4]{a}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{6^4} \times a} = \sqrt[12]{6^4 \times a}$

Atividades de aprendizagem

Nesta aula falamos sobre a radiciação, um exemplo prático de aplicação da raiz quadrada seria o da área, por exemplo, uma sala quadrada de 81 m2, tem nove metros de medida para cada lado.

Mas como calcular os lados de uma sala retangular? Pode-se utilizar a radiciação?

- Registre as suas conclusões.

Aula 6 – Operações fundamentais com números racionais (Operações com Frações)

Nesta aula você estudará um conjunto de seis operações com as frações (números racionais). Relembrará o cálculo do m.m.c. (mínimo múltiplo comum), de simplificação e equivalência de frações.

Vamos observar e entender algumas situações:

Receita de **BOLO DE BANANA:**

Ingredientes

- 2 bananas nanicas grandes
- 3 ovos
- 1 ½ xícara (chá) de açúcar
- ½ xícara (chá) óleo
- 2 xícaras (chá) de farinha de trigo
- 1 colher (sopa) de fermento em pó
- 1 colher (café) canela em pó

Figura 6.1 – Bolo de banana.
Fonte: http://appolloni.pt.

Chave de boca para apertar parafusos sextavados**.**

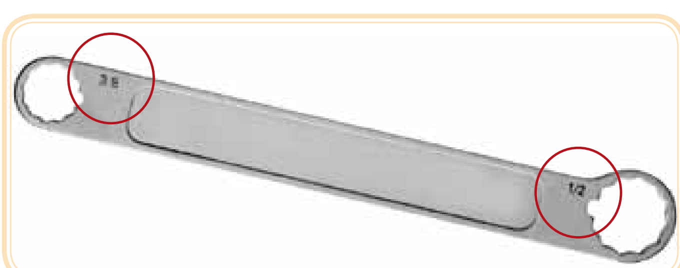


Figura 6.2 – Chave de boca.
Fonte: www.swissknifeshop.com.

Note que além dos números naturais, aparecem também os números racionais que chamaremos daqui em diante apenas de **frações**.

Para você o que é uma fração? Qual sua utilidade?

Você lembra-se das regras para realizar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com frações?

Qual a razão do esquecimento das "regras"? Vamos relembrar cada operação, mas antes um conceito importante:

A-Z

Fração (fra-ção)
s. f. Ação de quebrar, de partir uma coisa. Parte de um todo: uma fração do pão. Matemática: quebrado, expressão que indica uma ou mais partes da unidade. Retirado de: http ://www.dicionarioweb.com.br/fra%C3%A7%C3%A3o.html, acessado em 18/07/11.

6.1 Frações equivalentes

Vamos imaginar a seguinte situação:

Como representar metade?

Um modo é a representação na notação de porcentagem.

Dizer que um produto teve redução de preço de 50% significa que vamos descontar a metade do valor original.

Figura 6.3 – Anúncio de 50% de desconto.
Fonte: http://3.bp.blogspot.com.

Em linguagem de fração, temos:

$$50\% = \frac{50}{100}$$

Existe outro modo **equivalente** de representar a fração "cinquenta sobre cem"?

A resposta é sim. São várias as opções:

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Para chegar a estes resultados, mais simples em termos de valores numéricos, pois passamos de cinquenta (cinco dezenas) para cinco unidades e depois para a unidade, utilizamos a simplificação de frações até chegar à chamada **fração irredutível**.

- Prezado aluno, faça uma pesquisa sobre o significado de fração irredutível.

Retornando a fração $\frac{50}{100}$, façamos a simplificação até a fração irredutível.

Fazer a simplificação é tão somente transformar o numerador (parte de cima da fração) e o denominador da fração (parte de baixo da fração) em um proporção mais simples, com menores valores, até que não seja mais possível reduzí-la.

Deste modo:

$$\frac{50 \div 10}{100 \div 10} = \frac{5 \div 5}{10 \div 5} = \frac{1}{2}$$

Ou ainda,

$$\frac{50 \div 50}{100 \div 50} = \frac{1}{2}$$

Note que o 50 é o **máximo** divisor comum entre o 50 e 100.

Os divisores de 50 e 100:

D (50) = {0, 2, 5, 10, 25, **50**}

D (100) = {0, 2, 5, 10, 25, **50**, 100}

O maior (máximo) divisor comum a ambos é o **50**.

Existem outras possibilidades.

Converse com os seus colegas sobre outros possíveis divisores que simplificam a fração $\frac{50}{100}$.

- Registre as discussões e as possibilidades.

Note que a fração $\frac{1}{2}$ é irredutível, pois não há divisor comum para 1 e 2.

O que poderia ser feito ainda é a divisão entre 1 e 2:

$\frac{1}{2}$, que o mesmo que $1 \,\underline{|\,2\quad}$.

Resolvendo a divisão simples:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ \hline 0 & 0{,}5 \end{array}$$

→ Número na forma decimal: "zero vírgula cinco", ou melhor, "cinco décimos".

Meio, Metade, 50%, $\frac{1}{2}$ ou 0,5.

Para fazer o processo inverso - transformar o número decimal em fração - basta ler o número na forma decimal, utilizando a seguinte nomenclatura:

- décimos → quando houver uma casa decimal;
- centésimos → para duas casas decimais;
- milésimos → três casas decimais;
- décimos milésimos → quatro casas decimais;
- centésimos milésimos → para cinco casas decimais.

Exemplos:

1,2 lê-se: um inteiro e dois décimos;

2,34 lê-se: dois inteiros e trinta e quatro centésimos

Quando a parte inteira é zero, lemos apenas a parte decimal.

Exemplos:

0,1 lê-se: um décimo;

0,79 lê-se: setenta e nove centésimos

Existem outras formas de efetuar a leitura de um número decimal. Observe a leitura do número 5,53:

Leitura convencional: cinco inteiros e cinquenta e três centésimos;

Outras formas: quinhentos e cinquenta e três centésimos;
cinco inteiros, cinco décimos e três centésimos.

De modo similar a simplificação, mas agora utilizando a multiplicação no numerador e no denominador – proporcionalmente – temos as seguintes frações equivalentes à metade:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$$

Pois,

x 2

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$$

x 3

6.2 Operações com frações

6.2.1 Adição e Subtração

Tão fácil quanto "dois mais dois são quatro"?

Talvez não tão fácil assim.

Vamos a um exemplo, quanto dá $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = ?$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}?$$

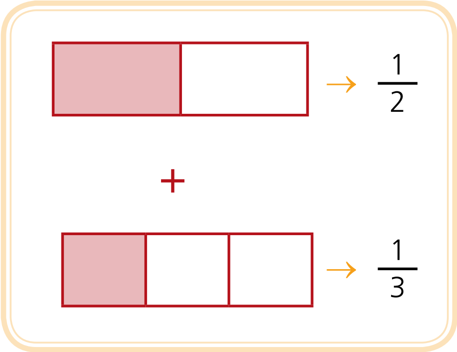
Este cálculo **não** está certo!

Então como fazer?

Vamos analisar as mesmas frações, mas acrescentando um contexto, uma representação geométrica por meio das partes de um todo.

Um retângulo está dividido em duas partes, sendo que uma das partes está em destaque, ou seja, a representação de $\frac{1}{2}$. A representação de $\frac{1}{3}$ será a de um retângulo dividido em três partes, sendo que uma das partes estará em destaque.

Representando por meio de figuras geométricas, temos:



Note que as partes (os denominadores) não são os mesmos, ou seja, as divisões não denominadas de modo igual.

Deste modo não será possível efetuar uma simples soma com os valores dos denominadores.

Seria semelhante a somar "dois reais" com "três dólares" e dizer que esta soma é igual a "cinco reais" ou a "cinco dólares".

Sendo assim precisamos transformar as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ em frações de mesmo denominador, **tomando o cuidado de fazer com que as frações sejam equivalentes**.

Sendo assim basta fazer com que "um meio" e "um terço" tenham o mesmo denominador.

Vejamos as frações equivalentes a $\frac{1}{2}$:

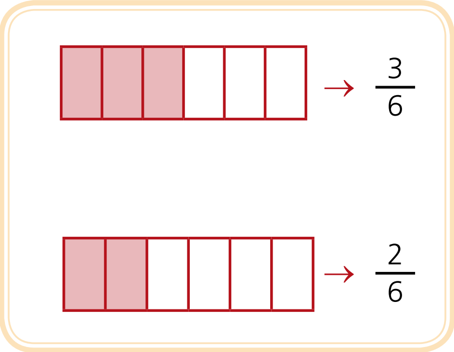
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots$$

Vejamos agora as frações equivalentes a $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \ldots$$

As frações de mesmo denominador são: $\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{6}$.

Na representação por meio de retângulos, temos:



Agora é possível somar substituindo as frações $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ pelas frações equivalentes correspondentes $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.

Então escrevemos uma "regra". Notem que decorar a "regra" fará com que esqueça com bastante facilidade as operações com frações.

Quando as frações possuem o mesmo denominador, somamos os numeradores e conservamos o denominador.

Exemplos:

- $\frac{24}{3} + \frac{6}{3} = \frac{30}{3}$ que simplificando é igual a 10.
- $\frac{15}{8} + \frac{16}{8} = \frac{31}{8}$, não dá para simplificar.
- $\frac{19}{23} + \frac{4}{23} = \frac{23}{23} = 1$
- $\frac{5}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9}$

No entanto, quando as frações são heterogêneas têm denominadores diferentes, temos que buscar frações equivalentes, com denominadores iguais.

Exemplo:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = ?$$

Método 1 – Adição e Subtração por meio de frações equivalentes

Tendo em vista que as frações são de denominadores diferentes (heterogêneas), podemos transformar as frações em outras, diferentes, mas equivalentes.

Frações equivalentes a um quarto:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \ldots$$

Frações equivalentes a um terço:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} \ldots$$

Deste modo é possível somar $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ utilizando as frações equivalentes correspondentes $\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$.

Método 2 – Adição e Subtração utilizando processo prático e operações de divisão e multiplicação.

Se preferir, basta verificar qual é o mínimo múltiplo comum (m.m.c) entre os denominadores.

Depois dividir o valor do m.m.c pelos denominadores (3 e 4).

Em seguida multiplicar pelo valor dos numeradores (1 e 1).

$$\overset{\times}{}\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\overset{\times}{=}$$

÷ ÷

12

Portanto fica assim:

$$\frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$$

Não esqueça!

Para a subtração de frações utilizam-se os mesmos métodos.

Somente na adição e subtração de frações deve-se utilizar o m.m.c.

Isto **não** é completamente verdadeiro.

Se pensarmos em frações equivalentes e abandonarmos momentaneamente a ideia de calcular o m.m.c. quando nos deparamos com as operações com frações, veremos que o m.m.c pode ser utilizado em **todas** as operações com frações.

6.2.2 Multiplicação e Divisão de frações

Uma regra bastante conhecida para a multiplicação de frações é a seguinte:

Para se multiplicar uma fração por outra, multiplicam-se seus numeradores para obter o numerador da fração produto e seus denominadores para obter o denominador da fração produto.

Exemplo:

$$\frac{3}{8} \times \frac{5}{9} = \frac{3 \times 5}{8 \times 9} = \frac{15}{72} = \frac{5}{24}$$

No caso da divisão de frações a "regra" muda um pouco:

Conserva a primeira fração e multiplica pelo inverso da segunda.

Mas decorar a "regra" equivale a esquecê-la com muita facilidade. Parece bem prático (realmente é), mas a intenção é entender o porquê disso.

Cabe observar que o modo prático (inverso multiplicativo) é bastante generalista, pois, em certos casos é impraticável encontrar o resultado de uma divisão por meio das representações com retângulos que apresentamos na operação de adição das frações.

Exemplo:

$$\frac{4}{15} \div \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \times \frac{5}{2} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3},$$

Copia a primeira, multiplica pelo inverso da segunda?

Quem é a 1ª? E a 2ª?

Mais intuitivo seria pensar em frações equivalentes:

$$\frac{4}{15} \div \frac{2}{5} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{15} \div \frac{6}{15} = \frac{\frac{4}{6}}{1} = \frac{2}{3}$$

Note que $\frac{2}{5}$ é equivalente a $\frac{6}{15}$ (multiplica-se numerador e denominador por três).

Assim recorremos a um procedimento interessante para dividir frações com denominadores diferentes sem ter que aplica "a regra".

O método de divisão de frações por meio de frações equivalentes é prático e resolve também todos os casos de divisão de frações.

Um caso não abordado anteriormente é o de divisão de frações quando temos, juntos, parte inteira e fracionária.

6.2.2.1 Dividir uma fração por um número inteiro

Método prático:

Para se dividir uma fração por um inteiro multiplica-se o denominador pelo inteiro.

Exemplo:

$$\frac{5}{6} \div 3 = \frac{5}{6 \times 3} = \frac{5}{18}$$

Ou ainda, por meio de frações equivalentes:

$$\frac{5}{6} \div 3 = \frac{5}{6} \div \frac{18}{6} = \frac{\frac{5}{18}}{1} = \frac{5}{18}$$

Resumo

Vimos nesta aula que as frações são representações de números na forma decimal.

Atividades de aprendizagem

- Alguns exemplos práticos foram apresentados, mas agora é com você, pesquise em que outras situações a representação de frações é mais adequada e por que.

Anotações

Aula 7 – Gráfico em setores: uma aplicação prática de proporcionalidade direta (regra de três)

Nesta aula aprenderemos a ler e interpretar gráficos e como eles podem ser úteis para, por meio de um desenho, resumir diversas informações importantes.

Analise o gráfico:

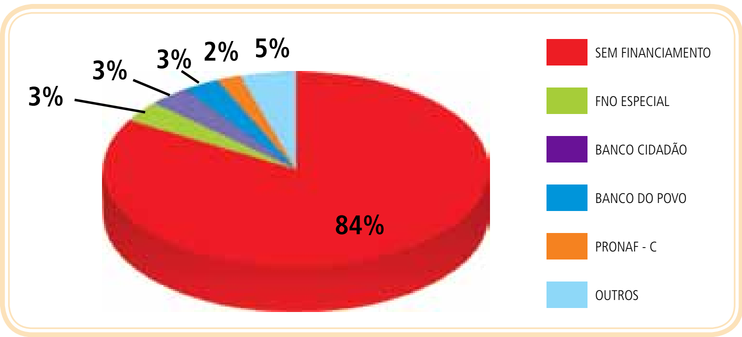


Figura 7.1 – Gráfico – ILHA DE MOSQUEIRO: Práticas de Pesca Sustentável numa Comunidade Tradicional da Amazônia – Estudo de Caso. Belém – Pará
Fonte: Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado à Universidade Norte do Paraná – UNOPAR, PEDRO DA SILVA LEÃO, 2011.

"Lendo" o gráfico nos damos conta que 84% dos pescadores da ilha do Mosqueiro, Belém - PA, não contam com financiamento para realizar suas atividades pesqueiras.

Mas como ler um gráfico? Isto é possível?

Como se obtém a relação entre a porcentagem do gráfico e o setor (tamanho da fatia da pizza)?

O gráfico de pizza, ou gráfico de setores é a representação gráfica de uma série estatística em um círculo de raio qualquer, por meio de setores com ângulos centrais proporcionais às ocorrências de uma dada tabela.

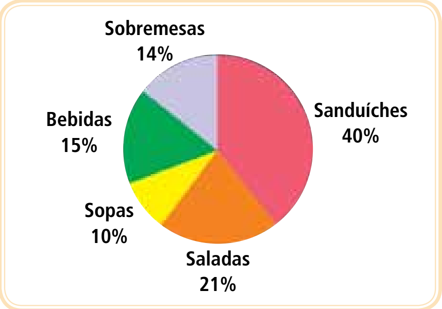


Figura 7.2 – Gráfico em setores.
Fonte: Elaborado pelo autor.

É muito utilizado quando se pretende comparar cada valor da série com o total.

O total da série corresponde a 360° (total de graus de um arco de circunferência, ou simplesmente a volta completa), que equivale a 100% do gráfico. O gráfico em setores representa valores absolutos ou porcentagens complementares.

Cada parcela componente do total será expressa em graus, calculada através de uma proporção simples (a famosa "regra de três"):

Total $\rightarrow$ 360°
Parte $\rightarrow$ x°

O símbolo "$\longrightarrow$" pode ser lido como: "está para".

Exemplo Prático:

Tema: Porcentagem dos membros de uma comunidade com 100 pessoas que possuem o hábito de assistir o horário político televisivo:

Frequência com que assiste	Frequência relativa
Sempre	31,5%
Nunca	68,5%

Resumo

Apresentamos um exemplo prático da regra de três (proporcionalidade direta).

Atividades de aprendizagem

- Agora você irá pesquisar um exemplo de regra de três, mas com proporção inversa.
  Registre o exemplo e escreva qual é a diferença entre regra de três direta e inversa.

Aula 8 – Geometria do sapato de salto alto. O teorema de Pitágoras vai às compras.

Nesta aula veremos a matemática, através do teorema de Pitágoras, participando do dia a dia da mulher quando, ao andar de salto alto, forma triângulo retângulo com elegância.

Você sabia que no século XV era considerado crime usar salto alto na Inglaterra?

> *Toda mulher que seduzir um homem para que ele se case com ela, utilizando-se de sapatos de salto alto ou outros artifícios(...)será castigada com as penas de bruxaria.*
>
> *Lei promulgada no séc. XV, pelo parlamento inglês*

Nos dias de hoje é cada vez mais comum o uso de salto alto entre as mulheres.

Para os ortopedistas os sapatos de salto alto podem se tornar vilões dos pés, pois com o tempo, as consequências do uso de um calçado errado podem causar muitos danos à saúde:

> Dores articulares nos dedos, calcanhar, tendinites, má circulação (resultando em varizes), dores musculares (exemplo: panturrilha), torção no joelho, resultando em problemas de lesão no menisco, em ligamentos e o mais comum: lesões na rótula e na coluna (lordose, lombalgias...)

Retirado de www.acessa.com/mulher/arquivo/beleza/2005/07/28-salto/. Acesso em 05 ago. 2009.

Figura 8.1 – Sapato de salto alto.
Fonte: http://tribodoesporte.com.br.

Quem algum dia não observou uma mulher de salto alto andando pela rua? O caminhar de quem está usando salto alto é potencialmente atrativo tanto auditivo quanto visual, uma combinação difícil de não ser notada.

A **figura 8.2** exibe um pé feminino 22,86cm, ou seja, nº de calçado 36. Mais adiante veremos como se calcula o numero do calçado de acordo com a medida do pé (medida do dedão até o calcanhar).

Ao usar saltos altos, normalmente boa parte do peso do corpo se concentra sobre os dedos dos pés em uma extensão de $^1/_3$ do tamanho do pé, no caso de um pé com 22,86cm, tem-se 7,62cm como mostra a **figura 8.2** de distância da base de apoio do pé e 15,24 (22,86 – 7,62)cm de envergadura do pé.

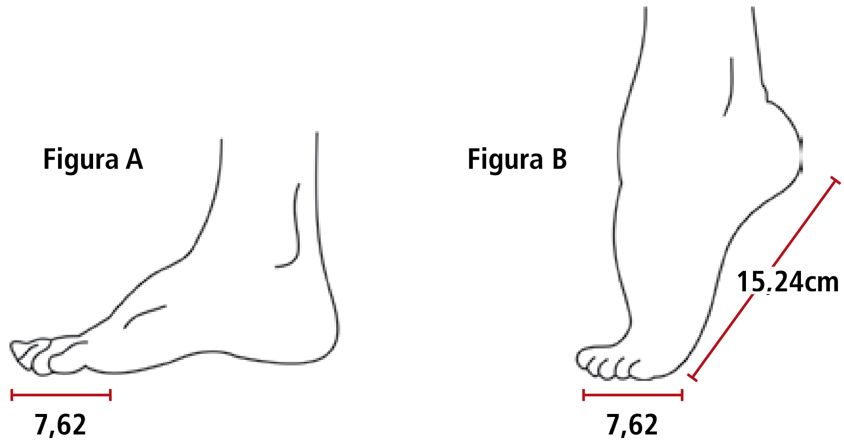
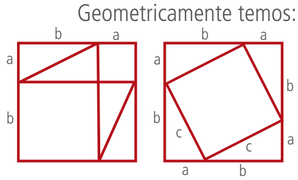


Figura 8.2 – Sapato de salto alto.
Fonte: Elaborado pelo autor. Adaptado.

O enunciado do teorema, que ficou conhecido como de Pitágoras, é: num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Geometricamente temos:



São dois quadrados, ambos com lados de medidas (a + b). O primeiro é formado por seis figuras: um quadrado de lado "a", um quadrado de lado "b" e quatro triângulos retângulos de catetos "a" e " b". Se chamarmos de Δ a área de um desses triângulos temos 4Δ que é igual a área total da segunda figura $(a + b)^2$, sendo assim temos a seguinte igualdade:

Eq. 1 $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 4\Delta$.

O segundo quadrado é composto também de quatro triângulos retângulos iguais aos anteriores mais um quadrado de lado c, equivalente à hipotenusa dos triângulos. Logo, nesse quadrado, temos:

Eq. 2 é $(a + b)^2 = c^2 + 4\Delta$.

Igualando os segundos membros das equações, temos:

$c^2 + 4\Delta = a^2 + b^2 + 4\Delta$.

Cancelando o termo 4Δ em ambos os membros da igualdade, resulta em: $c^2 = a^2 + b^2$.

Atividade prática

Vamos calcular quanto fica a projeção do pé quando se usa um sapato com salto de aproximadamente 12cm:

Note que podemos desenhar um triângulo retângulo no espaço delimitado pelo pé e o salto em relação ao chão:

Figura 8.3 – Salto alto tipo "agulha" – triângulo retângulo.
Fonte: www.alexis4u.com.

Nomeando os vértices do triângulo, passamos a ter o triângulo retângulo ABC, com medidas BC = 12cm e AC = 15,24, restando saber a medida do lado AB que chamaremos de projeção do salto, uma vez que é a "sombra" do sapato no chão.

Aplicando-se o **Teorema de Pitágoras** na figura anterior (triângulo ABC), no exemplo citado, a projeção da curva do pé é de 9,39 cm. A maneira que o tamanho do salto vai aumentando a projeção vai diminuindo. No caso de um salto de 15cm essa projeção seria reduzida de tal maneira que praticamente seria igual à curva do pé.

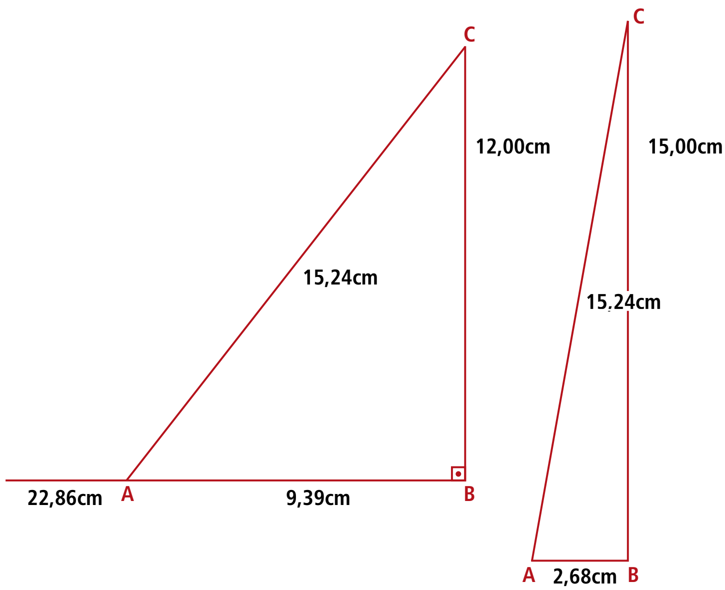


Figura 8.4 – Triângulos retângulos.
Fonte: Elaborado pelo autor.

O tamanho mais agradável e ideal do salto é 12cm, como mostra a figura A. Para saltos com alturas superiores a esta, sempre haverá um espaço vazio como mostra a **figura 8.5**. Isto ocorre por que a distância "a" (medida do lado AB), entre a ponta do salto e a "bola do pé", deve ter mínimo de 8cm.

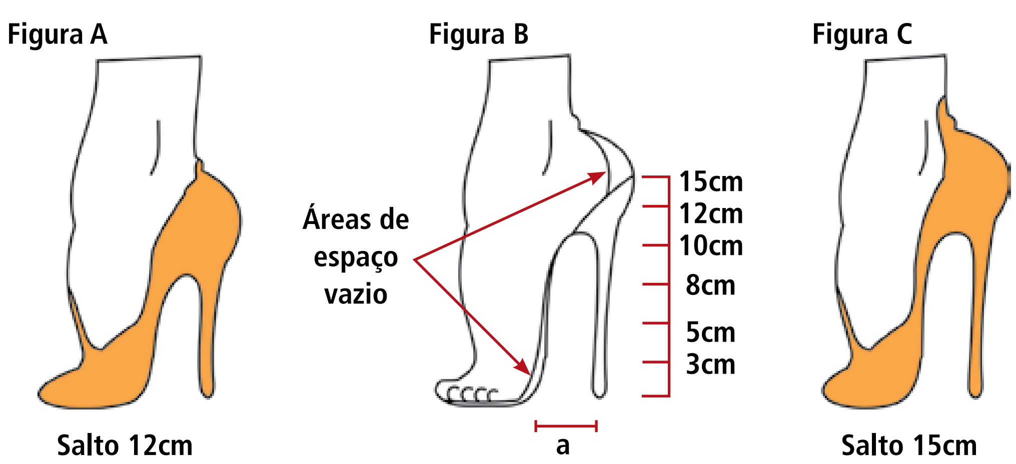


Figura 8.5 – Salto alto tipo "agulha".
Fonte: Elaborado pelo autor. Adaptado.

Se a distância AB for pequena é por que o salto é muito alto. Na figura seguinte note que a mulher ficaria com o tornozelo com ângulo de 90° (**figura 8.6**):

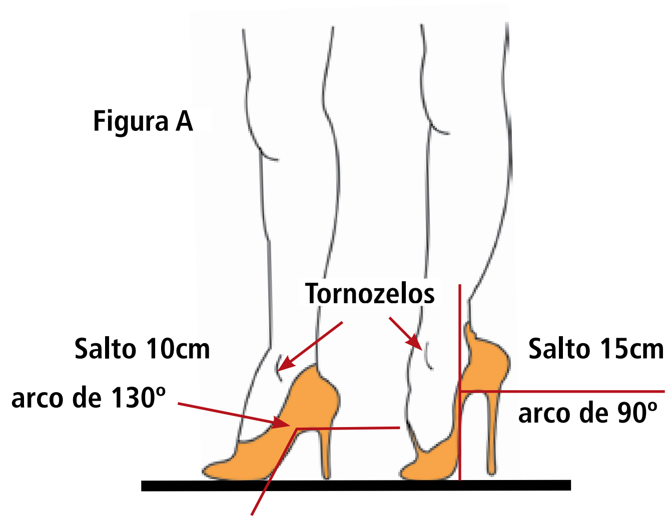


Figura 8.6 – Postura do tornozelo.
Fonte: Elaborado pelo autor. Adaptado.

Mas, então existe uma fórmula para calcular a altura do salto dos sapatos femininos? Sim, existe. Esta fórmula é atribuída ao professor de Física Paul Stevenson da Universidade de Surrey, no Reino Unido. Para isso, desenvolveu uma fórmula com nada mais nada menos do que cinco variáveis, entre elas, por exemplo, unidades de álcool consumidas.

Além desses fatores, a fórmula da altura máxima do salto leva em conta o tamanho do sapato e um fator **F** que representa o que o professor Stevenson denomina "fator sociológico". Esse fator representa, por exemplo, o grau de tolerância à dor e desconforto que uma mulher é capaz de suportar. Sendo assim Stevenson enuncia:

$$H = F \cdot \left(\frac{12 + 3.s}{8}\right)$$

Onde:

- H = a altura máxima do salto (em cm)
- F = fator sociológico que varia entre 0 e 1
- s = o tamanho do sapato (tamanho de sapatos com numeração do Reino Unido).

Resumo

Utilizamos o teorema de Pitágoras para explicar o cálculo da medida do salto alto. Existem alguns milhares de exemplos práticos que só podem ser realizados com a aplicação do teorema.

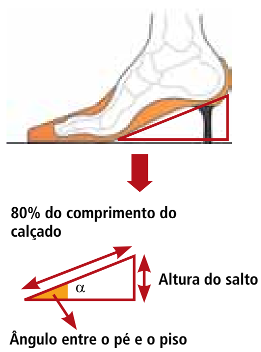
Atividades de aprendizagem

- Pesquise alguns exemplos de aplicação do teorema de Pitágoras, registre e calcule as medidas correspondentes: a hipotenusa e os catetos.

Anotações

Aula 9 – Geometria do sapato de salto alto. Exercício prático.

Em um artigo da revista *Prevenir* de Julho de 2007, uma podologista afirmou: "O pé humano está configurado para pisos um pouco irregulares e não para pisos completamente lisos. Um pequeno salto até contribui para uma adaptação mais ergonômica do pé ao piso. É da relação entre a altura do salto e o comprimento do pé que obtemos a inclinação ótima, que não deve ser superior a 10º (graus) - do 34 ao 37, a altura do salto não deve ser superior a 3 ou 4cm e, para um número de calçado superior ao 37, o salto não deve ser superior a 5cm."



N. do calçado	Comprimento do calçado (em mm)
34	227
35	233
36	240
37	247
38	253
39	260
40	267
41	273
42	280
43	287
44	293

Figura 9.1 – Comprimento dos calçados.
Fonte: Elaborado pelo professor.

Um detalhe que às vezes passa despercebido na compra de sapatos é o número utilizado para diferenciar os tamanhos dos calçados. A numeração que encontramos nas lojas, em princípio não tinha nada a ver com o tamanho dos pés. Tudo começou com um decreto do rei Eduardo I, da Inglaterra, em 1305. Ele estipulou, por exemplo, que trinta e quatro grãos de cevada equivaleriam ao número 34 e assim por diante. Por ser um padrão, ficou mais fácil comprar um sapato com a numeração adequada ao tamanho do pé.

Dá para perceber que essa norma não era lá muito precisa e também pouco objetiva. O número do sapato depende obviamente, do comprimento, emcm, do pé.

A fórmula veio bem depois e enuncia que: $N = \frac{5.c + 28}{4}$, onde N = número do sapato e c = comprimento do pé em centímetros.

Atividade prática

Vamos verificar o número do seu pé.

Para medir o comprimento do pé, desenhe o contorno dos dois pés numa folha, de preferência uma folha quadriculada. Com a caneta ou lápis bem na vertical, meça o comprimento desde o dedão até ao calcanhar. Deixe bem contornado, principalmente o dedão e o calcanhar. Ah sim! Não se assuste se um pé for maior que o outro! Isso é muito normal! Aí, temos que considerar o número maior. Apesar de que se estivesse em meados de 1800, os sapatos para os pés direito e esquerdo seriam considerados iguais.

Um exemplo:

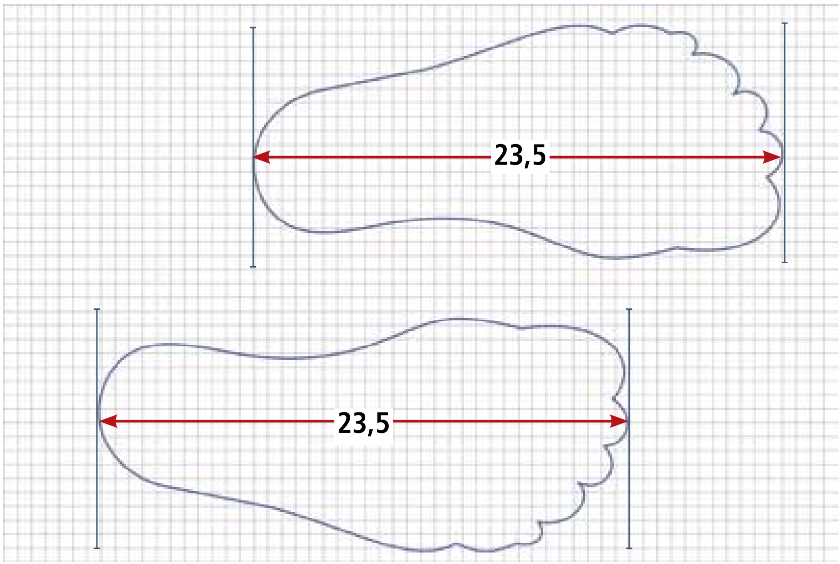


Figura 9.2 – Pés desenhados em malha quadriculada.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Na imagem repare que está em destaque a medida de 23,5cm do dedão até o calcanhar.

Pronto, agora basta aplicar a fórmula algébrica abaixo pra saber qual o número certo do sapato para um comprimento de pé igual a 23,5cm:

$$N = \frac{(5.\ 23{,}5 + 28)}{4}$$

$$N = \frac{(117{,}5 + 28)}{4}$$

$$N = 36{,}38$$

Nº do sapato, aproximadamente 36.

- E no seu caso? Qual é o tamanho do seu sapato segundo a fórmula de Blondell?

Resumo

A fórmula que calcula a numeração dos pés é uma aplicação de equação algébrica. Existem outras fórmulas que são a base do pensamento algébrico, nelas aparecem letras e números.

Atividades de aprendizagem

- Pesquise outras fórmulas que relacionam letras (variáveis e incógnitas) com números (constantes). Crie um exemplo prático e resolva-o.

Anotações

Aula 10 – Relógio marca ângulo? Um ensaio sobre a noção de ângulos e Geometria

Nesta aula você irá aprender sobre geometria, em especial sobre os ângulos nulos, agudos e obtusos e o modo como representar um ângulo notável: o ângulo reto ou ângulo de 90º, mas sem apelar exclusivamente para os ponteiros de um relógio.

10.1 Ângulos – definição

Mas, o que é mesmo ângulo? Note que o título do presente item trata do entendimento que se tem de ângulo, seus elementos, medidas e classificação. Não arriscamos "definir" o que é um ângulo. A definição seja ela filosófica, histórica, matemática, etimológica, transita por três campos bem definidos: as que recorrem às semi-retas, ao plano e àquelas que recorrem a outras ideias. (VIANNA & CURY, 2001)

As definições de ângulo que recorrem às semi-retas são as mais citadas pelos diversos autores brasileiros de Matemática (MACHADO, BONGIOVANNI, GIOVANNI, IMENES E LELLIS). Sendo assim podem ser subdivididas em:

1. Aceitam os ângulos: nulo e raso;
2. Não aceitam os ângulos: nulo e raso;
3. Aceitam o ângulo nulo, mas não aceitam o ângulo raso. (VIANNA & CURY, 2001)

Notamos que as definições de: "ângulo nulo" e "ângulo raso" são consideradas como conhecidas *a priori*. Sendo assim vamos arriscar um entendimento do que vem a ser ângulo, ângulo nulo e raso.

Bem, onde aparece ângulo? Talvez em um canto de parede, com a ideia de giro nos ponteiros do relógio, nos movimentos dos braços em relação às pernas e tronco. Não foi assim que aprendemos? Mas, será suficiente?

Ângulo nulo nos remete a "vazio", "zero", "ausência de". Então um ângulo nulo é aquele que não aparece... E um ângulo raso? "A piscina está rasa", te faz lembrar-se de algo? Vamos tentar uma imagem disso:

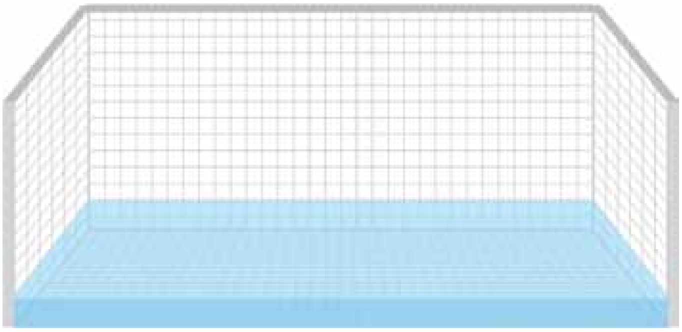


Figura 10.1 – Piscina rasa.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Então, raso é o ângulo horizontal? Dá para construir ângulo raso verticalmente? Com abertura no compasso de meia volta? Ou seja, 180° é ângulo ou não passa de uma linha reta qualquer?

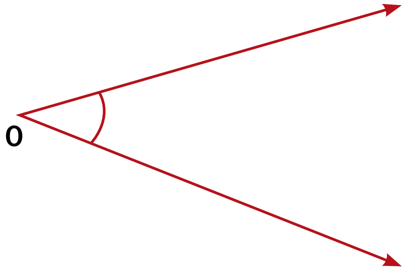
A seguir apresentamos algumas das definições apontadas por Vianna & Cury (2001) encontradas em livros de matemática das escolas brasileiras:

10.1.1 Definições que recorrem a semi-retas

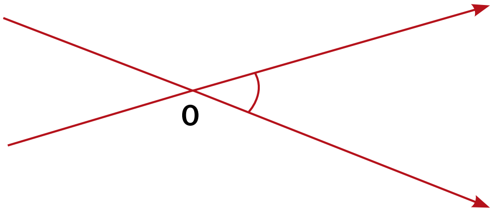
10.1.1.1 Aceitam os ângulos nulo e raso:

1. Ângulo é a figura formada por duas semi-retas que têm a origem comum. (QUINTELLA, 1950, p. 139, 3° ginasial)

Uma ideia inicial é fazer um esboço da definição do autor, assim poderemos analisar melhor a representação final da definição apresentada. Seguiremos esse princípio para cada definição apresentada.



2. Ângulo é a figura formada pela reunião de duas semi-retas tendo a mesma origem. (SANGIORGI, 1966, p. 154, 3° ginasial)

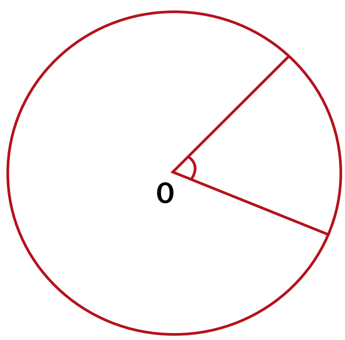


3. Da Geometria Plana sabemos que um ângulo é caracterizado por um par de semi-retas de origem no mesmo ponto. (MACHADO, 1994, p. 218, v.1)

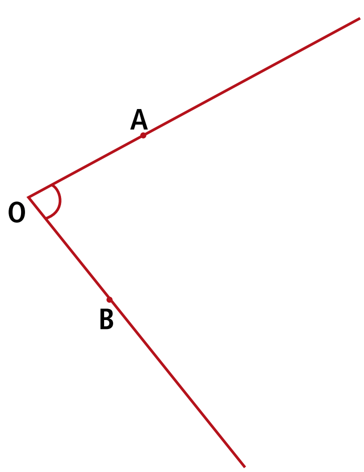
Note que a noção e ênfase dadas no conceito de semi-retas de mesma origem parece ser o mais comum, simples e objetiva. Seria a ideal? Vejamos o que os autores classificam adiante.

10.1.1.2 Não aceitam os ângulos nulo e raso:

1. Um ângulo é a reunião de dois raios que têm o mesmo ponto extremo, mas não estão situados na mesma reta. (SMSG, 1964, p. 43, v.1)



2. Considere três pontos não colineares: A, O e B. Ângulo geométrico AÔB é a figura formada pelas semi-retas OA e OB. (BONGIOVANNI *et.al*, 1990, p. 212, 5ª série).



O fato de que os livros analisados considerarem que, por exemplo, ângulo como raios que não estão na mesma reta, impede que os ângulos: nulo e raso existam. Note que no livro do autor Bongiovanni, três pontos não colineares, são pontos não pertencentes à mesma reta. Novamente descarta a existência dos ângulos nulo e raso. Seria ideal? Vejamos o que os autores classificam a seguir.

10.1.1.3 Aceitam o ângulo nulo, mas não aceitam o ângulo raso.

1. A reunião de duas semi-retas distintas, de mesma origem e não opostas é um ângulo. (IEZZI, DOLCE E MACHADO, 1982, p. 198, 6ª série).

2. Ângulo é uma figura geométrica plana, formada por duas semi-retas, não opostas e de mesma origem. (MORI E ONAGA, 1998, p. 229, 6ª série).

Vejamos se não aceitamos que semi-retas podem ser opostas, descartamos a possibilidade de que, por exemplo, os ponteiros do relógio estejam marcando 6h em ponto.

Não estamos defendendo que o melhor é aprender a trabalhar com ângulos nos ponteiros do relógio.

Ângulo é estanque em geometria plana, ou seja, os apelos dinâmicos só podem ser percebidos em ponteiros de relógio, abertura/fechamento de portas, entre outros. Na geometria dinâmica, por meio de softwares específicos (por exemplo, o Cabri-Géomètre ou o Geogebra – falaremos deles mais adiante) podem-se animar os traçados para melhor visualização por parte do aluno. Sendo assim ângulos nos ponteiros do relógio tem intencionalidade didática não conceitual.

No caso dos ponteiros do relógio, dizer que 06h00min equivale a um ângulo raso, pode até ajudar na visualização do ângulo raso. Mas e no caso do relógio marcar 12h30min? Também temos um ângulo igual a 180º? Compare as imagens que seguem:

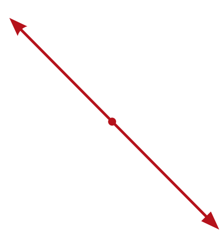
Note que quando o relógio marca, pontualmente 12h30min, o ângulo entre os ponteiros é diferente de 180º.

Figura 10.2 – Relógio com transferidor.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Pela imagem do transferidor sobreposta ao relógio, o ângulo formado pelos ponteiros tem aproximadamente 160º. Para facilitar a visualização o relógio foi girado em sentido anti-horário com 90º, uma interessante utilidade dos ângulos para orientação espacial.

10.1.1.4 Aceitam o ângulo raso, mas não aceitam o ângulo nulo.

1. A figura formada por duas semi-retas de mesma origem e não-coincidentes chama-se ângulo (BIANCHINI, 1986, p. 84, 7ª série).

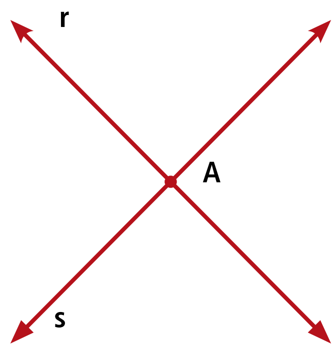


2. Ângulo é a figura geométrica formada por duas semi-retas de mesma origem e não coincidentes (MALVEIRA, 1987, p.123, 7ª série).

Vejamos se não aceitamos que semi-retas podem ser coincidentes, descartamos a possibilidade de que, por exemplo, os ponteiros do relógio estejam marcando 12h (ou 24h) em ponto.

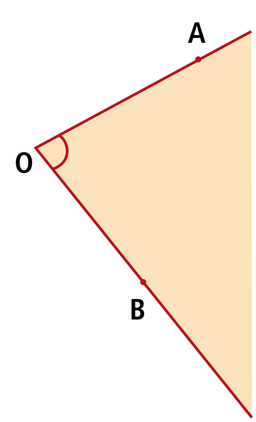
10.1.2 Definições que recorrem à região do plano

1. Duas retas r e s que se cortam em um ponto A, dividem um plano em quatro regiões. Cada uma dessas regiões recebe o nome de ângulo. (PIERRO NETO, s/d, p.258, 1ª série ginasial)



2. Sejam OA e OB, duas semi-retas distintas de mesma origem O. A região do plano determinada pelas duas semi-retas é chamada ângulo. (DOMÊNICO, LAGO E ENS, s/d, p. 93, 7ª série)

3. Denominamos ângulo a região convexa formada por duas semi-retas não-opostas que têm a mesma origem. (GIOVANNI E GIOVANNI JR., 2000, p.30)



Recorrendo ao plano, não se descarta a possibilidade de construção de semi--retas que estejam contidas nesse plano. Note que a abertura determinada pelas semi-retas determina um espaço que os autores chamam de plano. Dessa maneira ângulos nulos seriam representados por planos coincidentes? E ângulos rasos por planos opostos? Podemos discutir algumas dessas questões durante a tutoria.

10.1.3 Definições que recorrem a outras ideias

1. Com as peças do **Tangram** é possível (...) formar triângulos retângulos isósceles de vários tamanhos. O que há de comum nesses triângulos? (...) Veremos que há elementos desses triângulos que não dependem do tamanho dos triângulos. São os ângulos (...). (LOPES, 1994, p. 95, 6ª série)

2. Antônio sai de casa às 11 horas e chega ao serviço às 11h e 30 min. Às 11h, o ângulo entre os ponteiros do relógio é 30° (...) São 11h 30 min. Qual é o ângulo entre os ponteiros? (IMENES E LELLIS, 1997, p. 61, 6ª série).

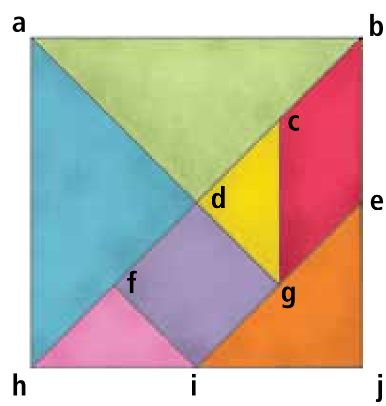


Figura 10.3 – Tangran.
Fonte: http://educador.brasilescola.com

Mas qual seria a "definição" mais correta de ângulo? Se é que ela existe...

Uma tentativa de responder ao questionamento seria: "aquela que aprendi", ou "a que mais ouvi ou li a respeito", ou "aquela que entendo tanto que desconsidero as outras", ou ainda "aquela que aprendi na minha prática".

Segundo Vianna e Cury (2001), a tentativa de responder qual a melhor definição de ângulo nos leva a outra questão:

> (...) o que significa, exatamente, definição 'correta'? Quais os critérios para aceitar uma definição e não aceitar outra? Em uma análise inicial, vemos que, nas definições citadas, há uma clara variação de linguagem ao longo do tempo, além da persistência de dois grupos, um que considera o ângulo constituído pelas semi-retas e outro que considera o ângulo constituído por uma região do plano, havendo predominância do primeiro. Além disso, é possível encontrar diferenças significativas que vão além dos termos utilizados. Por exemplo, entre as definições que recorrem a semi-retas, encontramos todos os casos possíveis quanto à aceitação ou não dos ângulos nulo e raso. (VIANNA & CURY, 2001 p. 4)

A-Z

Tangram
É um quebra-cabeça chinês formado por 7 peças (5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo) Com essas peças podemos formar várias figuras, utilizando todas elas sem sobrepô-las. Segundo a Enciclopédia do Tangram é possível montar mais de 1700 figuras com as 7 peças. Esse quebra-cabeça, também conhecido como jogo das sete peças, é utilizado pelos professores de matemática como instrumento facilitador da compreensão das formas geométricas. Além de facilitar o estudo da geometria, ele desenvolve a criatividade e o raciocínio lógico, que também são fundamentais para o estudo da matemática. Não se sabe ao certo como surgiu o Tangram, apesar de haverem várias lendas sobre sua origem. Uma diz que uma pedra preciosa se desfez em sete pedaços, e com elas era possível formar várias formas, tais como animais , plantas e pessoas. Outra diz que um imperador deixou um espelho quadrado cair, e este se desfez em 7 pedaços que poderiam ser usados para formar várias figuras.
Fonte: http: //www.repia.art.br/ear/index.php?pag=30&prog=243.

Percebemos que definir o "campo da definição" se torna emergencial quando pretendemos expor aos alunos conceitos que retiramos dos livros didáticos. Vimos que as decisões sobre a correção de uma determinada definição constituem um assunto delicado, que envolve, entre outros fatores: a **não** aceitação de uma só definição. Por exemplo, poderíamos recorrer a outros livros, principalmente de Desenho Geométrico, dicionários (escolares, etimológicos e filosóficos), pesquisar em livros da História da Matemática ou ainda, conversar com outros professores sobre as possíveis definições e utilidade dos ângulos.

Ainda, conforme Vianna & Cury (2001) concordo quando afirmam:

> As escolhas, entretanto, não são neutras, elas não são feitas em 'abstrato'; podemos nos perguntar: quais são e como operam as concepções prévias dos professores de Matemática, no momento em que se propõem a fazer a escolha de uma definição? Esse é um ponto fundamental! (VIANNA & CURY, 2001, p. 6)

Resumo

Nesta aula estudamos as várias definições de ângulos que aceitam ou não ângulos rasos e/ou nulos, utilizando como referência os ponteiros do relógio.

Atividades de aprendizagem

- A noção de ângulo é importante para o estudo da geometria. Pesquise no seu cotidiano situações onde a medida dos ângulos aparecem.

Aula 11 – Linhas poligonais e curvas

Quando uma forma cria beleza tem na beleza sua própria justificativa.

Oscar Niemeyer

O que mais aparece nas formas que nos cercam: as curvas ou as retas? Uma reta pode ser curva? Uma curva pode ser reta?

Nesta aula enfatizamos que esteticamente as retas (mais especificamente os segmentos de reta) são apresentadas como entes geométricos perfeitos, pois, a interseção de diferentes segmentos de reta, com vários ângulos forma o que daqui em diante chamaremos de polígonos.

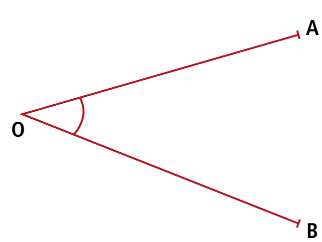
Inicialmente trataremos polígonos como sendo poli (vários/muitos) gonos (ângulos). Ou seja, figuras fechadas com vários ângulos.

Desse modo, ao final desta aula, você deverá compreender:

- Conceitos fundamentais de Desenho Geométrico, quais sejam: poligonal aberta (simples e não-simples), figura côncava e convexa;
- A nomenclatura referente aos principais polígonos;
- A possibilidade de construção de triláteros e quadriláteros com régua e compasso;
- A exploração das diferentes possibilidades de obtenção de polígonos, ângulos e casos particulares de interseção de retas.

11.1 Retomando conceitos importantes de Geometria euclidiana

De forma muito simples, retomamos alguns conceitos bastante primitivos de geometria no plano, tais como: dois segmentos de reta de mesma origem determinam um ângulo.



Da figura anterior, lê-se: ângulo AÔB. É o ângulo formado pelos segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$, a origem *O* é comum aos dois segmentos.

O ângulo AÔB pode ser medido em graus, com o auxílio do transferidor.

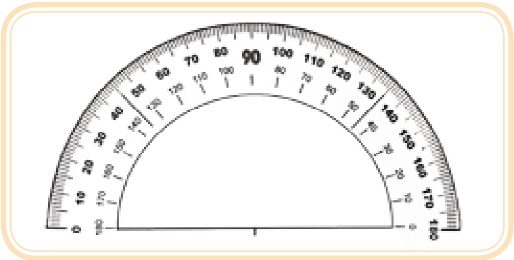
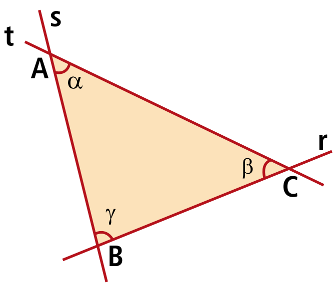


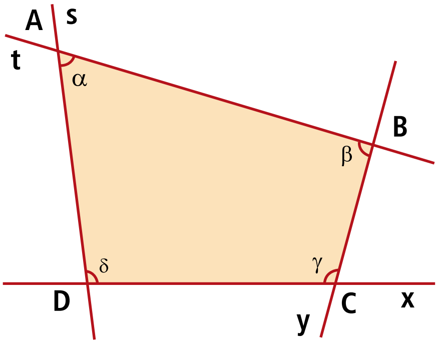
Figura 11.1 – Transferidor.
Fonte: www.sodine.com.br

Retomando a ideia intuitiva de ângulo, vamos retomar o conceito de reta como sendo a linha que intercepta dois pontos quaisquer do plano euclidiano (não curvo). Sendo assim, três pontos não alinhados determinam uma figura rígida que podemos chamar de figura plana formada por três retas e três ângulos com vértices compartilhados.



As retas determinam uma região poligonal fechada simples e convexa. O que chamamos de **triláteros** (quanto aos lados) ou **triângulos** (quanto aos ângulos) os quais trataremos com maior ênfase nesta aula.

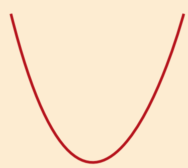
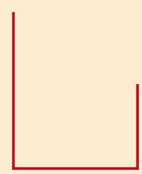
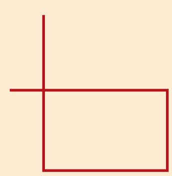
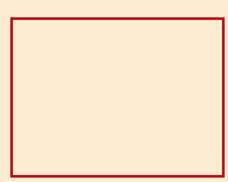
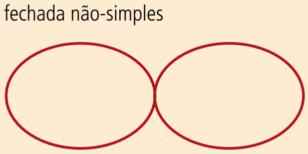
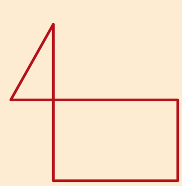
Quatro pontos, não alinhados, determinam uma figura não rígida que podemos chamar de figura plana formada por quatro retas e quatro ângulos internos com vértices compartilhados.



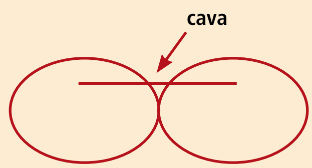
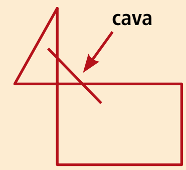
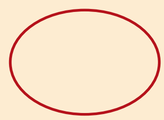
As retas determinam uma poligonal fechada simples e convexa. O que chamamos de **quadriláteros** (quanto aos lados) ou **quadrongos** (quanto aos ângulos).

Poligonais são regiões formadas por retas ou semi-retas, sendo classificadas como abertas ou fechadas, simples ou não simples, côncavas ou convexas. Para este capítulo, nos atemos às poligonais convexas fechadas simples com mais de dois lados, ou simplesmente, ***polígonos*** → ***poli*** (vários/muitos), ***gonos*** (ângulos).

A tabela seguinte sintetiza as principais características das poligonais e curvas do espaço euclidiano, considerando que toda linha é também uma curva.

Curvas	Poligonais
Curva aberta simples (não possuem ponto de interseção) 	Poligonal aberta simples 
Curva aberta não-simples (possuem ponto de interseção) 	Poligonal aberta não-simples 
Curva fechada simples 	Poligonal fechada simples 
Curva fechada não-simples 	Poligonal fechada não-simples 

As figuras curvas ou poligonais fechadas simples ou não-simples podem ser classificadas como côncavas ou convexas:

Curvas	Poligonais
Curva côncava (curva "com cava") 	**Poligonal côncava (poligonal "com cava")** 
Curva convexa (curva desprovida de cava; antônimo de côncavo) 	**Poligonal convexa (poligonal desprovida de cava; antônimo de côncavo)** 

Baseado na tabela anteriormente citada, registre no seu caderno de anotações (resumo de cada aula), as diferenças que observou entre as curvas e poligonais, abertas e fechadas, simples e não-simples, côncavas e convexas e de que modo podem ser exploradas ou identificadas de modo prático, no seu dia a dia. Discutiremos essas questões no Fórum da disciplina.

Na aula seguinte trataremos com maior ênfase das curvas convexas, em especial da circunferência e dos espaços curvos (não-euclidianos) e que serão tratados com maior ênfase quando abordarmos as Geometrias do Espaço Curvo, e, na sequência, trataremos das poligonais fechadas convexas, em especial os triláteros (figura com três lados) e quadriláteros (figura com quatro lados).

Retomando as questões inicias: Uma reta pode ser curva? Uma curva pode ser reta? Vamos retomar algumas possíveis definições de retas paralelas:

- "Duas retas que, situadas no mesmo plano, não tem ponto em comum." (FERREIRA, 2004)

- "Linha ou superfície equidistante de outra em toda a extensão."

Retirado de www.priberam.pt/dlpo/definir_resultados.aspx, acessado em 10/12/07.

A mesma definição pode ser encontrada em Ferreira (2004).

Agora analise as imagens que seguem:

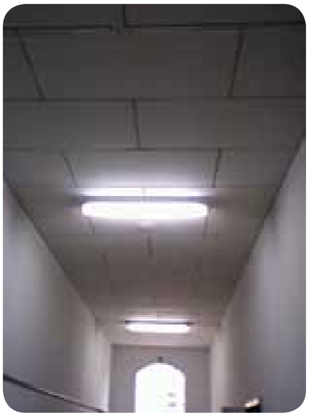



Figura 11.2 – Retas paralelas.
Fonte: Acervo do autor.

Se paralelas são retas, que no mesmo plano, nunca se encontram no infinito, como explicar o fato de que as linhas do teto de um corredor tendem a se encontrar quanto mais afasto a câmera fotográfica? Nesse caso trata-se de uma ilusão de ótica, devido a figura estar em perspectiva. Apesar de parecer que as retas estão se encontrando, a distância entre elas permanece a mesma, determinando retas paralelas. Nesse caso, nossos olhos são "enganados" pela posição da máquina fotográfica em relação ao teto.

O conhecido dicionário Aurélio, (FERREIRA, 2004), curiosamente cita também que em geometria "reta paralela é a reta que só tem em comum com outra um ponto no infinito".

E as curvas, podem ser paralelas? Observe a figura 11.3:

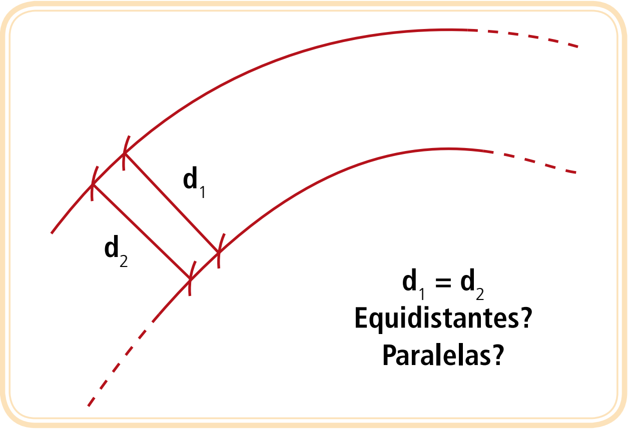
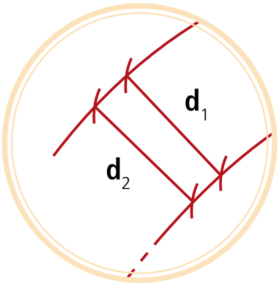


Figura 11.3 – Curvas paralelas.
Fonte: Elaborado pelo autor.



Aumentado o zoom na imagem e focando um trecho das curvas, percebemos que tomando dois pontos de lados opostos temos distâncias iguais, em toda a extensão. Ou seja, tais pontos seriam equidistantes, mesmo mudando a direção das curvas.

O conceito euclidiano de paralelismo é fundamental nas construções de polígonos. As paralelas delimitam alturas de triângulos e quadriláteros, servem como marcadores nas interseções de arcos para determinar vértices nas construções que desenvolveremos no decorrer desta aula.

Em seguida apresentamos a nomenclatura adotada para os principais polígonos e elementos abordados neste capítulo. As notações são padronizadas. Dessa forma podemos, por exemplo, girar o triângulo, criar enunciados para construções afins e explorar diferentes possibilidades avaliativas.

11.2 Triláteros ou triângulos: construção, elementos e propriedades – uma introdução e padronização dos elementos principais

Observe a **figura 11.4** onde os vértices (pontas) estão marcados com as letras maiúsculas A, B e C. Sendo assim os lados opostos aos vértices do triângulo são marcados com as letras minúsculas a, b e c.

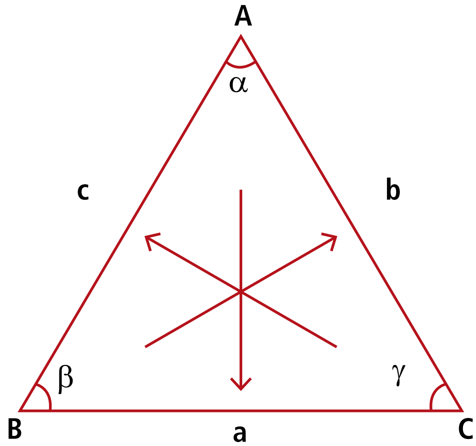


Figura 11.4 – Triângulo com os elementos geométricos em destaque.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os ângulos internos seguem a letra do respectivo vértice. Sendo o vértice A alfa (α), B beta (β) e C gama (γ).

Os lados são representados por letras minúsculas do nosso alfabeto (a, b, c).

Os pontos (vértices ou pontas da figura) por letras MAIÚSCULAS do nosso alfabeto.

Os ângulos por letras minúsculas do alfabeto grego: alfa (α), B beta (β) e C gama (γ).

Pronúncia	Minúscula	Maiúscula
alfa	α	Α
beta	β	Β
gama	γ	Γ
delta	δ	Δ
épsilon	ε	Ε
dzeta	ζ	Ζ
eta	η	Η
teta	θ	Θ
iota	ι	Ι
capa	κ	Κ
lâmbda	λ	Λ
mi	μ	Μ

Pronúncia	Minúscula	Maiúscula
ni	ν	Ν
ksi	ξ	Ξ
omicron	ο	Ο
pi	π	Π
rho	ρ	Ρ
sigma	σ	Σ
tau	τ	Τ
upsilon	υ	Υ
phi	φ	Φ
khi	χ	Χ
psi	ψ	Ψ
ômega	ω	Ω

Figura 11.5 – Alfabeto Grego.
Fonte: www.profwillian.com. Adaptado.

Resumo

Nem tudo é linha reta. As formas curvas também são objeto da geometria, em especial das geometrias não euclidianas.

Atividades de aprendizagem

- Procure uma definição sobre geometria euclidiana contrapondo com a geometria não euclidiana. Responda: qual é a principal diferença entre ambas?

Aula 12 – Desenho Geométrico com régua sem escala e compasso

Nesta aula trataremos de apresentar e discutir algumas ideias fundamentais sobre o Desenho Geométrico (DG) como possibilidade de aprender Matemática por meio da geometria clássica. Para isso, vamos explorar, inicialmente, a ideia das formas geométricas como construção humana. Da ideia de formas presentes nas ações humanas e naturais, partiremos para o estudo do Desenho Geométrico.

> *As abelhas... em virtude de uma certa intuição geométrica... sabem que o hexágono é maior que o quadrado e o triângulo, e conterá mais mel com o mesmo gasto de material.*
>
> *Papus de Alexandria*

12.1 Apresentação do Desenho Geométrico como meio de se aprender matemática.

A capacidade de apreciar as formas, perceber padrões e possibilidades nas criações da natureza e do homem é natural na maioria dos seres vivos. Desde a abelha que percebe intimamente que o favo hexagonal é ótimo do ponto de vista da quantidade (o volume é máximo) e de rápida construção (as abelhas diminuem o gasto com cera na construção das paredes), ou mesmo estudos que buscam entender por que os planetas têm órbitas elípticas, a estrela-do-mar, a forma pentagonal, o caramujo espiralado (sua concha segue a razão de ouro) e as antigas construções gregas do Pathernon possuírem retângulos áureos em toda estrutura, motivam pesquisas em Matemática e Física, especificamente em Geometria há milênios.

A beleza e variedade das formas criam motivação para os estudos, técnicas e atividades que pretendemos discutir nos capítulos seguintes. O desenho, especificamente geométrico, permite que o homem perceba possibilidades que não são visíveis no plano da abstração. A possibilidade de conhecer e aplicar técnicas de desenho com régua e compasso amplia a visão que se tem sobre a criação e exploração da Arte e da Geometria.

As formas geométricas aparecem em toda parte, desde um simples grão de areia, uma colmeia de abelhas ou mesmo o floco de neve são dotados de grande diversidade de formas.

Figura 12.1 – Geometria da colmeia de abelhas.
Fonte: www.sxc.hu.

Figura 12.2 – Geometria dos flocos de neve.
Fonte: http://entranaciencia.blogspot.com.

O laço histórico formado entre a Matemática e o a Geometria vem desde os *Elementos* de Euclides (300 a.C), amplamente difundido como sendo **geometria euclidiana**, que trata essencialmente do desenho sobre planos ou em três dimensões baseadas em postulados e axiomas. Estruturamos o presente material com clara menção a esta geometria, em especial ao livro I de Euclides que trata das definições (axiomáticas) dos entes geométricos fundamentais: **ponto, reta e plano**.

Observe que a habilidade em desenhar não é restrita a Arquitetos, Engenheiros, Desenhistas etc. Para desenhar é preciso ter criatividade e motivação, e conforme pretendemos explorar, esses aprenderam os primeiros traços motivados por expressar seus sentimentos, criações.

A intuição seria uma quase verdade, pois, não está baseada em leis gerais e pelo raciocínio. Em contrapartida tem-se a dedução/suposição que delimita o campo intuitivo pelo viés das leis gerais, **postulados** e **axiomas**.

A-Z

Postular
Conjugar v. tr.1. Pedir com instância; suplicar.
Axioma
|acsi| (latim axioma, -atis, do grego axíoma, -atos) s. m. Proposição tão evidente que não precisa ser demonstrada.

Um computador não tem intuição, é conduzido, condicionado a ações pré-definidas (algoritmos). Quem intui é o usuário (interessado) em explorar tal algoritmo. Sendo assim, "os computadores não são apenas assistentes dos matemáticos, mas transformam a natureza da própria Matemática, e, portanto, são vistos como atores do coletivo pensante." (BORBA *et al.*, 2007, p. 68.)

A perspectiva euclidiana é fundamental para que se tenha clareza que os traçados de Desenho Geométrico são lógicos e bem definidos. Não obstante, apresentam a geometria como um sistema lógico e bem estruturado. As definições, os axiomas ou postulados e os teoremas não aparecem agrupados ao acaso, mas antes expostos numa ordem que tende a perfeição na forma.

Cada teorema resulta das definições, dos axiomas e dos teoremas anteriores, de acordo com uma demonstração rigorosa, o chamado método axiomático, um nobre exemplo de um sistema lógico, ideal, que muitas outras ciências imitaram e continuam a imitar.

As definições de desenho são estudadas e aplicadas por diversas áreas como a Engenharia, Arquitetura e Design gráfico, e até pela Química. A base em figuras geométricas e construção de sólidos ajudam, por exemplo, na engenharia de alimentos e nos processos de otimização das embalagens.

A seguir apresentamos a campanha da Nestlé®, que se utilizou do desenho (formas geométricas) para anunciar seu antigo produto, em nova embalagem.

A embalagem do "Leite moça®".

Toda forma de amar vale a pena. Não se preocupe com a sua.
Deve ser por isso que existe amor que nasce meio quadrado, meio sem querer.
Que existe triângulo amoroso e amores que andam em círculos.
Porque o amor, não importa a forma, tem o privilégio da juventude.
Amor, não envelhece com a gente. Nunca muda.
Nem na essência e muito menos na alma.
O que às vezes muda é só a forma de amar.
Mas de amar, o amor de sempre.
Nova lata de Moça. Nossa nova forma de amar você.
É… o amor faz maravilhas e como faz bem.

Campanha Leite moça em 2004, retirado de: http://umguiadecomoviverbem.blogspot.com/2011/06/e-mais-facil-amar-ou-se-apaixonar.html. Acessado em 20/06/11.

Percebe-se que a estrutura e forma da embalagem passaram por grandes modificações desde que foi lançada em 1921.

Figura 12.3 – Lata de leite moça.
Fonte: www.nestle.com.br.

A forma curva permite a otimização do manuseio da embalagem (sem escape) e gastam menos material por lata, além de tornar a tradicional lata de leite condensado muito mais atraente e destacada no disputado mercado das marcas e aparências.

Resumo

Nesta aula vimos exemplos de formas geométricas na natureza e em construções humanas desde a antiguidade, aplicações em várias áreas, softwares de geometria dinâmica e técnicas de desenho utilizando compasso e régua.

Atividades de aprendizagem

- Procure outros exemplos de formas geométricas encontradas na natureza que podem servir de inspiração para resolver problemas do dia-a-dia.

Exemplo:

Estrutura de papelão com as formas geométricas inspiradas em colmeias, que oferecem maior resistência e ao mesmo tempo leveza para os painéis de MDF (lamínas de fibras de madeiras utilizadas na confecção de móveis).

Figura 12.4 – MDF com estrutura inspirada na geometria da colméia.
Fonte: www.masisa.com.

Anotações

Aula 13 – Instrumentos utilizados para desenhar geometricamente

Nesta aula veremos que com régua sem escala (ou seja, sem marcações dos submúltiplos do metro) e compasso, procurando destacar as relações do Desenho Geométrico com a Matemática e as aplicações práticas dessa metodologia e quais os instrumentos que utilizados.

A qualidade dos traçados, organização e limpeza são requisitos fundamentais para a qualidade dos traçados em Desenho Geométrico.

Opte por lápis ao invés de lapiseira, o traçado feito com lápis não deixa marcas na folha. Os tipos de lápis disponíveis para desenho podem ser classificados como HB ou n.° 2 (próprio para traçados que podem ser apagados), 2B (para traçados "definitivos", mais espessos) e 6B (para preenchimento de polígonos e destaque de traçados).

Cabe observar que com os recursos dos inúmeros softwares (pagos e não pagos) de Desenho Geométrico disponíveis para os computadores pessoais, a escolha da espessura do traço é tão simples quanto apertar um botão para ligar a máquina. Cabe ressaltar que nenhum dos citados são criações 100% brasileiras.

Não vamos discutir o funcionamento desses softwares de imediato, apenas sugerimos cinco mais utilizados para desenho sejam acadêmicos ou de uso profissional, são eles:

1. Softwares CAD (em português: Desenho Assistido por Computador - DAC)
2. Cabri-Géometrè;
3. Geometer's Sketchpad;
4. Geogebra;
5. Cinderella;
6. Wingeom (...)

Fonte contendo a lista de softwares de Geometria Dinâmica: www.edumatec.mat.ufrgs.br/softwares/soft_geometria.php

Para registrar os traçados, seja nas atividades desenvolvidas durante as aulas ou quando for resolver as atividades autoinstrutivas, utilize um caderno apropriado para DG, preferencialmente com margens milimetradas e folhas do tipo A4. Os traçados a lápis podem ser destacados diferentemente com os lápis citados anteriormente, estas observações aparecerão no corpo da atividade, quando necessário. Trata-se de um exercício importante para aquele que deseja aprimorar o traço ao desenhar, nem tudo é mais simples de desenhar no computador.

O instrumento mais importante para a resolução das atividades é o compasso, sem ele sua atividade ficará reduzida a um esboço e posteriormente deverá ser registrada com os arcos feitos com compasso. Além de tornar belo o traçado de circunferência, o compasso é fundamental no transporte de ângulos e medidas.

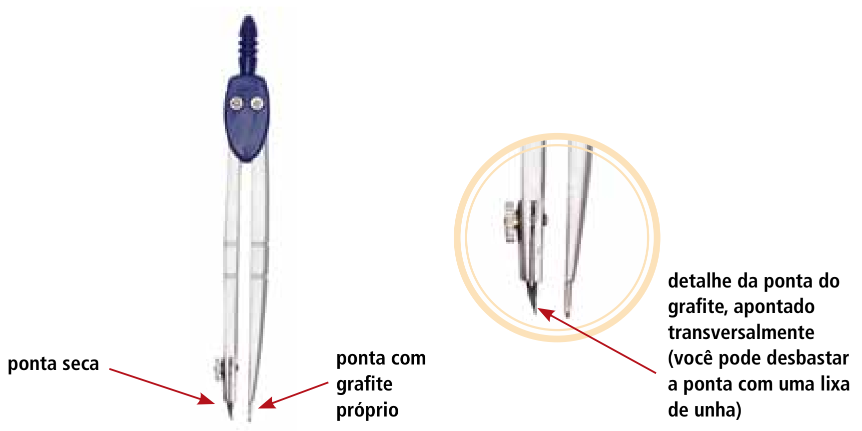


Figura 13.1 – Detalhe do compasso para caderno de Desenho Geométrico.
Fonte: www.papelariajussara.com

Atente para o fato de que as atividades serão realizadas, em sua grande maioria, com o compasso. Sendo assim não apague os arcos, estes são a garantia da construção tal e qual indicaremos.

O compasso está dividido em duas hastes articuladas:

- Haste primeira: *ponta seca* (feita de metal, pontiaguda).
- Haste segunda: *ponta com grafite* (deve ser reposta e apontada para maior precisão do traçado).

Figura 13.2 – Compasso e esquadro para quadro de giz.
Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br.

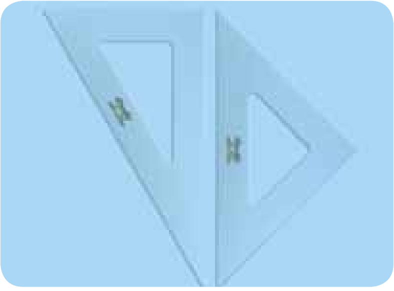


Figura 13.3 – Régua ou esquadro sem escala.
Fonte: www.trident.com.br.

As construções geométricas da aula seguinte serão feitas utilizando um par desses materiais. Não descarte a possibilidade de utilizar réguas com escala, transferidor e esquadros para auxílio ou mesmo um gabarito das medidas e traçados efetuados, mas entenda que desse modo a aprendizagem de geometria ficará mais bem caracterizada.

O que deve ser observado ao término de cada atividade é a organização dos arcos determinados pelo compasso, sem que aconteça sobreposição dos mesmos. A intenção é que os desenhos, se necessário, sejam revistos passo a passo e retomados do ponto de parada até a conclusão das atividades.

Resumo

Nesta aula vimos exemplos formas geométricas na natureza e em construções humanas desde a antiguidade, aplicações em varias áreas, softwares de geometria dinâmica técnicas de desenho utilizando compasso e régua.

Atividades de aprendizagem

- Escolha um dos softwares citados e desenhe na tela do programa duas retas paralelas e duas retas perpendiculares. Salve a imagem, imprima e cole no seu caderno de registros.

Anotações

Aula 14 – Desenho Geométrico – primeiros traçados: Perspectiva Euclidiana e Perspectiva Não-Euclidiana

Vamos, nesta aula, conhecer a diferença entre as perspectivas Euclidiana e Não-Euclidiana e os elementos mais comuns encontrados nas formas geométricas, chamados de entes geométricos fundamentais

Observamos que todos os objetos possuem forma. Os diferentes sentidos dos seres, particularmente a visão e o tato, permitem "sentir" diferentes emoções.

A perspectiva apontada aqui é a Geometria no plano, de caráter intuitivo-dedutivo. Os elementos mais comuns encontrados nas formas geométricas são: o ponto, reta e plano. Tradicionalmente chamados de entes geométricos fundamentais. Para tanto utilizaremos a noção de dimensão como grandeza mensurável, sendo uma figura tridimensional (espacial) dotada de largura, comprimento e altura, plana com dimensões de largura e comprimento, ou ainda linear (com uma dimensão), o comprimento.

Um ponto pode ser a cabeça de um alfinete, o resultado do cruzamento de duas retas (ou até mesmo de duas curvas ou arcos feitos com compasso), você pode imaginar uma multidão vista de cima, para um observador que estivesse sobrevoando o local onde elas estão estas seriam pontos.

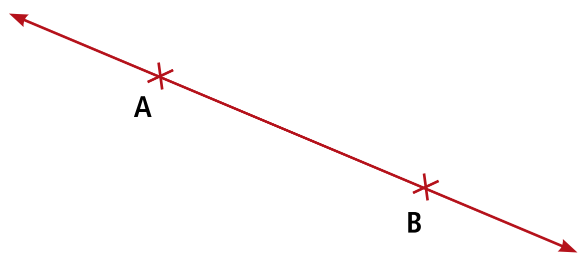
Tendo em vista o fato de que o ponto não esta determinado pelas dimensões, dizemos que o ponto é um ente **adimensional** (desprovido de dimensão).

Daqui em diante trataremos de explorar os pontos não isolados. Por exemplo, dois pontos desenhados em uma folha, independente da posição, determinam uma reta? E se estiverem desenhados na superfície de uma bexiga, teríamos uma reta?

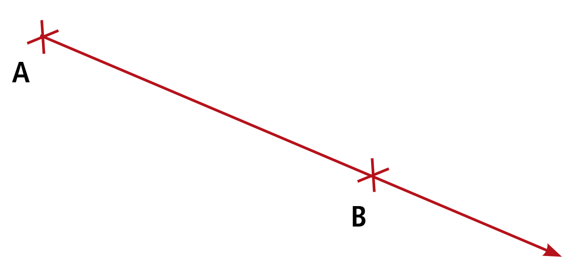
Vamos considerar as duas possibilidades como verdadeiras. Agora observe as figuras seguintes e registre o que observou. Que críticas poderiam ser feitas às definições anteriormente apresentadas?

Figura 14.1 – Superfície de uma bexiga.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma infinidade de pontos determina, quando alinhados, uma reta. Quanto mais pontos, mais "estico" a reta. Como indicação, simbolizamos a reta que passa por dois pontos A e B como sendo: $\overleftrightarrow{AB}$, ou seja, a reta não começou a ser desenhada em A e sim passou por A (teve como ponto de partida outro ponto distinto) e passou por B, não terminando o traçado por B. Sendo um tanto pragmático, podemos dizer que a reta não tem começo e nem fim.



Se fixarmos um ponto como início do traçado da reta, sem a preocupação de um fim, teremos uma semi-reta. Como indicação, simbolizamos a semi-reta que passa por dois pontos A e B como sendo: $\overrightarrow{AB}$, ou seja, a reta começou a ser desenhada em A e passou por B, não terminando o traçado por B. Grosso modo, podemos dizer que a semi-reta tem começo, mas não tem fim.



O "esticar", ou mesmo o fim do traçado pode ser delimitado, seria, então, o comprimento do segmento de reta, ou seja, um pedaço da reta, com começo e fim definidos. Como indicação, simbolizamos o segmento de reta delimitado por dois pontos A e B como sendo: $\overline{AB}$, ou seja, a reta começou a ser desenhada em A e terminou o traçado em B. Podemos dizer que o segmento de reta tem começo e tem fim.

Sendo assim o segmento de reta é **unidimensional**, ou seja, está determinado pelo comprimento.

Uma infinidade de pontos determina, quando não alinhados, um plano ou superfície. Três pontos, não alinhados, determinam um plano? Bem, depende da superfície não é mesmo?

Para facilitar a identificação dos entes geométricos nas atividades auto instrutivas o combinado é:

- Pontos receberão a identificação por qualquer letra do alfabeto latino, para destacarmos e diferenciarmos das retas utilizaremos letras maiúsculas; Podemos também representá-los com um sinal de interseção "**+**" ou simplesmente "**.**";

- Retas serão nomeadas seguindo o mesmo critério, porem utilizaremos letras minúsculas;

- Os planos serão nomeados, preferencialmente, pelas três primeiras letras minúsculas do alfabeto grego: α (*alfa*), β (*beta*) e γ (*gama*).

Vamos criticar o que apresentamos? Retome suas ideias sobre a geometria no plano (euclidiana) e compare-as com as ideias apresentadas até o momento. Registre suas observações. De que maneira você poderia comparar a geometria euclidiana com a não-euclidiana? Registre suas observações que posteriormente discutiremos no Fórum da disciplina.

Resumo

Tomando como referência as ideias inicialmente abordadas, apresentamos alguns aspectos importantes do trabalho com Desenho Geométrico.

O Desenho Geométrico quando feito com régua e compasso permite a exploração e vislumbre de diferentes caminhos para a chegada do traçado proposto, um dos ingredientes para um bom aprendizado de Matemática.

Em linhas gerais, além de fazer uso das definições apontadas por Euclides, podemos ampliar nossos conhecimentos em DG comparando os postulados euclidianos (determinados no plano) aos não-euclidianos (determinados em superfícies esféricas).

Concluindo essa aula, apontamos algumas reflexões para o porquê aprender Desenho Geométrico, além de padronizar a nomenclatura técnica para o desenvolvimento das atividades propostas.

Atividades de aprendizagem

- Escolha um objeto para o estudo da geometria não euclidiana. Por exemplo, como desenhar um quadrado na superfície externa de uma bexiga, enfim de um objeto esférico. Registre as suas observações.

Aula 15 – Triângulos – os primeiros polígonos

Nesta aula estudaremos os seis principais triângulos, como construir e os principais elementos geométricos.

Nos primeiros desenhos, vamos focar a classificação quanto aos lados: o triângulo equilátero possui todos os lados de mesma medida, ou seja, congruentes. O triângulo equilátero é também equiângulo, pois todos os seus ângulos internos são congruentes, medindo 60°, sendo, portanto, classificado como o primeiro polígono regular.

Já o triângulo isósceles possui pelo menos dois lados de mesma medida e dois ângulos congruentes (de mesma abertura ou medida em graus). O triângulo equilátero é, consequentemente, um caso especial de um triângulo isósceles, que apresenta não somente dois, mas todos os três lados iguais, assim como os ângulos, que medem todos 60°.

Em um triângulo escaleno, as medidas dos três lados são diferentes. Os ângulos internos de um triângulo escaleno também possuem medidas diferentes.

Vamos estudar com mais profundidade cada um dos triângulos citados, construindo-os com régua sem escalas e compasso:

15.1 Triângulo equilátero

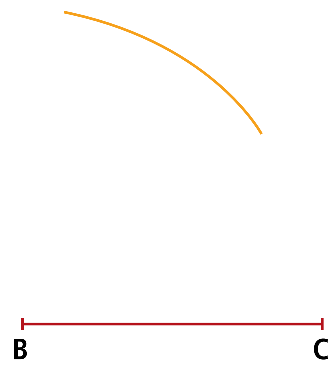
Equi (equivalente/congruente) *látero* (lado). Ou *equiângulo* = *equi* (equivalente/congruente) *ângulo* (os ângulos internos medem 60°).

Exemplo:

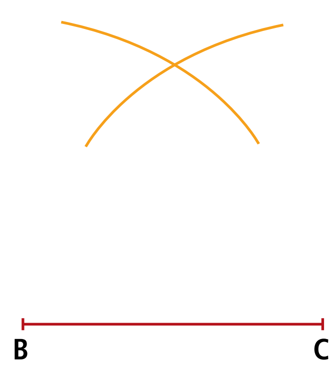
Construção do Δ ABC equilátero de lado 4cm utilizando apenas régua sem escalas e compasso.

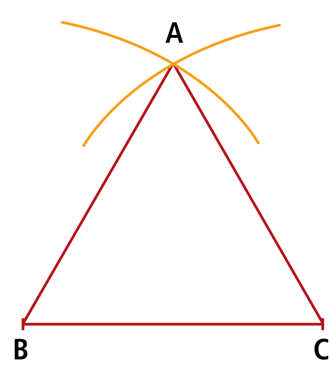
1° passo: traçar um segmento de reta com 4cm que servirá de base para o triângulo, por exemplo a base poderia ser o segmento $\overline{BC}$.

2° passo: com a ponta seca em B, em sentido horário, traçar um arco de abertura 4cm.



3° passo: proceda da mesma maneira em C, em sentido anti-horário. Os arcos se interceptam em um ponto que será o vértice A do triângulo.





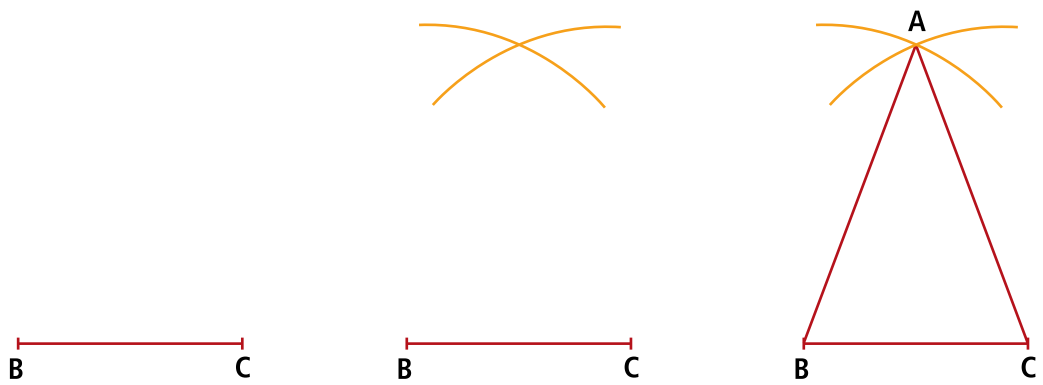
Cabe ressaltar que os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60° e a soma dos ângulos internos de um triângulo, no espaço euclidiano é 3 x 60° = 180°.

15.2 Triângulo isósceles

Iso (igual/congruente) *cele* (lado). Difere do triângulo equilátero, pois, apresenta dois lados e dois ângulos de medidas iguais.

Exemplo:

Construção do Δ ABC isósceles de lados congruentes 4cm e base $\overline{BC}$ = 3cm.

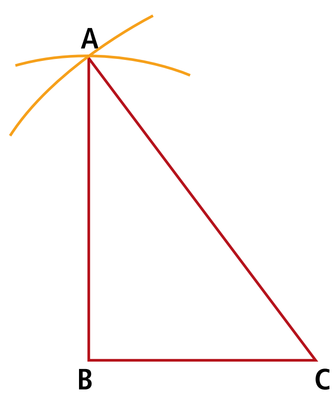


15.3 Triângulo escaleno

Difere do triângulo equilátero e do isóscele(s), pois, apresenta os três lados de medidas diferentes.

Exemplo:

Construção do Δ ABC escaleno de lados a = 3cm (base), c = 4cm e b = 5cm.



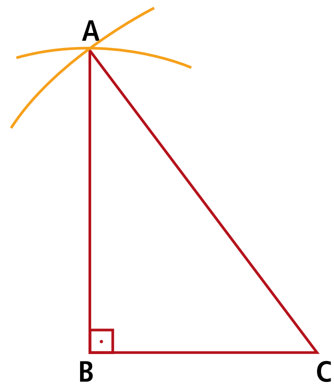
Nesta aula estudaremos também os principais triângulos referente a classificação quanto aos ângulos: triângulo *acutângulo* (acut = agudo/pontiagudo), *obtusângulo* (obtuso = maior que 90°) e *retângulo* (reto ângulo = 90°).

15.4 Triângulo retângulo

Possui um ângulo reto, medindo 90°.

Exemplo 1

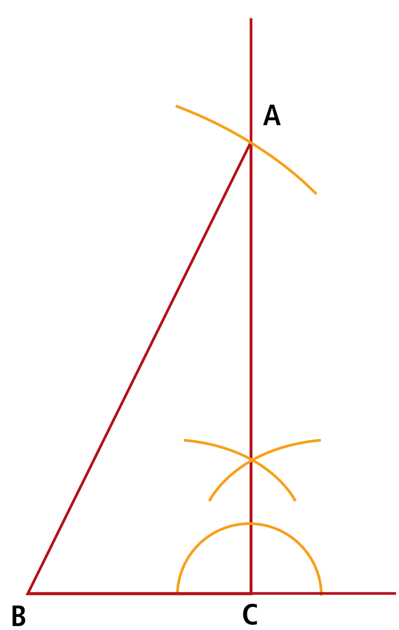
Construção do Δ ABC retângulo de lados a = 3cm (base), c = 4cm e b = 5cm.



Note que a construção é idêntica a do triângulo escaleno. Tal situação sempre irá ocorrer com qualquer múltiplo de 3, 4, 5. Por exemplo: 6, 8, 10; ou 9, 12, 15; e assim por diante, serão sempre triângulos retângulos.

Exemplo 2

Construção do Δ ABC retângulo em C, de lados a = 3cm (base), c = 6cm.



Note que a medida do lado b não foi fornecida, pois, não é necessária, uma vez que a semi-reta $\overline{CA}$ intercepta o arco traçado $\overline{BA}$ = c = 6cm. Perceba que a construção da perpendicular $\overline{CA}$ difere da apresentada no capítulo 2, pois, existe a possibilidade de prolongar o segmento $\overline{BC}$. Para tal colocamos a ponta seca em C e traçamos uma semi-circunferência de medida qualquer. Os pontos de interseção da semi-circunferência com o segmento $\overline{BC}$ servem como centros para os arcos (congruentes), que na interseção, formam a semi-reta $\overline{CA}$, com ângulo reto em C.

Tendo em vista que importantes relações matemáticas foram demonstradas partindo de triângulos retângulos, ressaltamos que os triângulos retângulos possuem nomenclaturas especiais em relação às medidas de seus lados. O lado maior do triângulo retângulo, ou ainda, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa (hipotenusa vem do grego e quer dizer "aquilo que está em baixo"). Os lados adjacentes (ligados) ao ângulo reto são chamados de catetos (do grego, significa "os que são perpendiculares"). Sendo assim vale a relação $c^2 = a^2 + b^2$, o teorema de Pitágoras.

Sabe-se muito pouco sobre Pitágoras. Sua vida foi envolvida em aspectos mitológicos, teria recebido a filosofia por uma revelação divina (filho de Apolo) e seria onipresente. Deixou duas doutrinas célebres: a divindade do número e a crença na migração das almas de corpo em corpo. Pregava que os números constituem a essência de todas as coisas, são a verdade eterna e o princípio de tudo.
(Livro Didático Público de Matemática, SEED – PR, vários autores, 2007, 2ª Edição.)

Curiosidade

Escher (1898-1970) abusa das diferentes perspectivas planas e repetições de padrões geométricos. A passagem de M. C. Escher por Alhambra, em Granada, o fez se surpreender os azulejos mouros. Este contato com a arte árabe está na base do interesse e da paixão de Escher pela divisão regular do plano em figuras geométricas que se transfiguram, se repetem e refletem pelas pavimentações nem sempre possíveis no lugar comum da geometria plana.

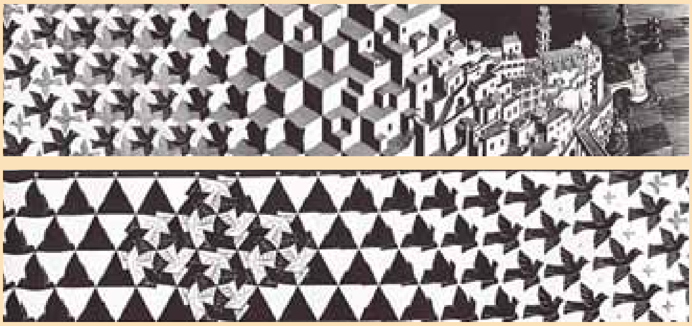


Figura 15.1 – Metamorfose, xilogravura de Escher, 1939-40.
Fonte: http://www.leninimports.com/m_c_escher_verbum_art_print.html

Livro xilografia: Escher On Escher - Exploring The Infinite
Autor: ESCHER, M. C.
Tradutor: FORD, K.
Editora: ABRAMS USA
Website oficial: http://www.mcescher.com.

Resumo

O triângulo está entre a principais figuras geométricas estudadas na matemática. Conhecemos sua classificação quanto aos lados: equilátero, isósceles e escaleno e quanto aos ângulos: acutângulo, obtusângulo e retângulo.

Atividades de aprendizagem

- O que acontece ao tentar construir um triângulo com lados de medidas $a = 1cm$, $b = 2cm$ e $c = 3cm$? Tente construí-lo e registre o que observou, pois esse é o princípio de uma lei que pode ser geral. Que lei geral poderia ser formulada a partir das construções anteriormente apresentadas? Registre a lei geral no seu caderno de anotações e posteriormente discutiremos no Fórum da sua disciplina.

Anotações

Aula 16 – A parede está no esquadro?

Nesta aula você irá aprender sobre geometria, em especial sobre os ângulos e o modo como representar um ângulo muito especial: o ângulo reto ou ângulo de 90º.

A prática de esquadrejar, ou simplesmente "colocar no esquadro" serve tanto para a marcenaria quanto para a alvenaria. Colocar no esquadro significa deixar entre as paredes, chapas e sarrafos de madeira, o ângulo reto, com 90º.

Vamos retomar algumas maneiras de se obter um ângulo reto por meio de instrumentos de precisão:

• Na construção civil: o esquadro.	 **Figura 16.1 – Esquadro com nível.** Fonte: http://storemixbrasil.com.br.
• Na escola: os esquadros.	 **Figura 16.2 – Esquadro escolar.** Fonte: www.superofi.com.

O ato de esquadrejar é uma prática importante na construção civil, pois sem a presença do ângulo reto (ângulo de 90º) ocorrem alguns inconvenientes um tanto complicados de resolver, seja para a estrutura do imóvel, como para a segurança de seus habitantes. As complicações são também de ordem estética, pois os móveis (planejados ou não) estão no esquadro e, o canto da parede não estando, "não casa" medidas, não encaixa.

Conforme relato feito por um profissional da área, constata-se esta preocupação:

> Para cada lado faço marcas no alinhamento, para um lado a marca é feita a uma distância de 60cm do ponto de encontro com o outro alinhamento, no outro lado marco 80cm, marcando do mesmo jeito, depois meço com uma corda a distância entre os dois lados e tem que dar 1m, que é igual a 100cm. Se não der certo, a casa está fora de esquadro e será preciso refazer tudo. (CARVALHO, 2008, p. 26)

A necessidade de colocar no esquadro é bem antiga, o que muda são os equipamentos utilizados.

Os egípcios já utilizavam o teorema de Pitágoras e o aplicavam em situações práticas, mas relacionadas ao plantio.

O equipamento era uma corda com 13 nós igualmente espaçados para determinar um ângulo de 90º e, do mesmo modo, determinar a perpendicular a uma dada reta.

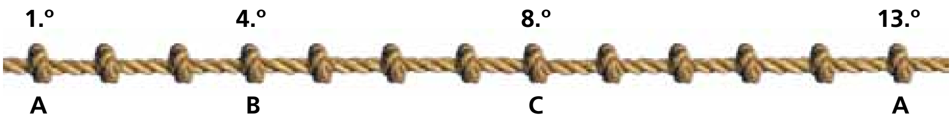


Figura 16.3 – Corda e nós.
Fonte: Banco de imagens DI.

A corda de 13 nós igualmente espaçados ficava dividida em 12 partes iguais. Um homem fixado no ponto A segurava os dois nós extremos (o 1º e o 13º); um segundo homem, no vértice B, segurava o 4.º nó; e um terceiro homem, em C, segurava o 8.º nó.

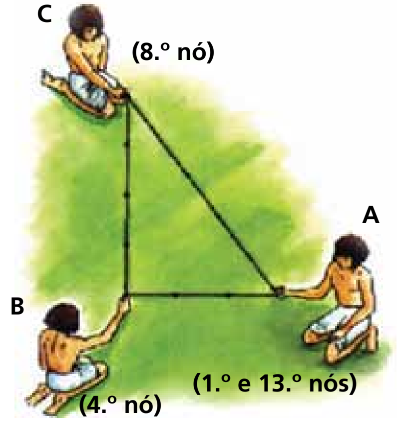


Figura 16.4 – Corda e nós no triângulo retângulo.
Fonte: www.prof2000.pt.

Para a civilização ocidental, vale mais utilizar o esquadro para acertar os cantos de paredes em alvenaria ou madeira.

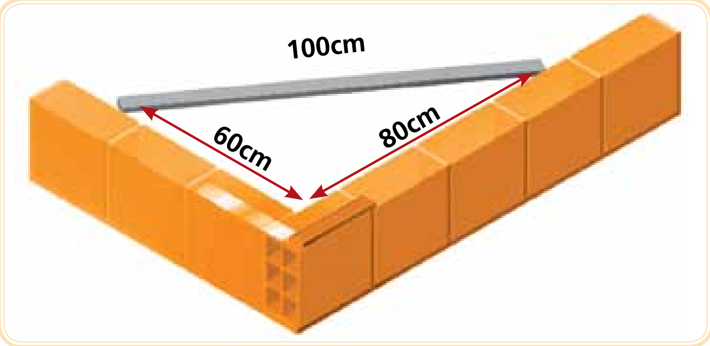


Figura 16.5 – Esquadrejar na prática do pedreiro.
Fonte: http://dicasparapedreiro.blogspot.com. Adaptado.

Esta mesma prática de utilizar a relação pitagórica 3, 4, 5 pode ser utilizada para qualquer proporção. Por exemplo:

- Multiplicando por dois: 6, 8, 10
- Multiplicando por cinco: 15, 20, 25
- Multiplicando por dez: 60, 80, 100

E assim sucessivamente, qualquer que seja o múltiplo escolhido, mantém-se a proporção.

Hoje, se precisar construir um triângulo retângulo, provavelmente, utilizará um transferidor ou um esquadro como gabarito.

Depois basta traçar um segmento de reta MD, em uma direção diferente de da reta AB e com o mesmo comprimento de AM.

Resumo

Neta aula pudemos conhecer como colocar no esquadro e a importância do ângulo reto no alinhamento dos elementos da construção civil, no denegrir de móveis, etc.

Atividades de aprendizagem

- Observe ou tire uma foto de uma parede fora do esquadro. Quais as consequências arquitetônicas ou estruturais desta falha geométrica?

Filme: FÁBULAS Disney. **Donald no País da Matemágica**. Produção de Walt Disney. EUA, 1959. 1 videocassete (27 min). VHS, color.
É possível encontrar também em DVD, além de poder baixar partes que estão disponíveis na internet em *sites* como o Youtube, Google vídeos, entre outros.
Formidável desenho de Walt Disney onde o personagem Pato Donald explora a relação entre música, padrões da natureza, divina proporção (razão áurea), ótica, astronomia e a matemática dos pitagóricos.

Aula 17 – Porcentagem

Nesta aula veremos uma aplicação de proporção simples de uma razão bastante conhecida: a fração com denominador 100, ou seja, a porcentagem.

Vamos analisar a seguinte situação:

> Todos os proprietários de piscinas, num determinado momento, têm de levar a cabo uma batalha contra a proliferação de algas ocasionais. Entram constantemente nas piscinas esporos de algas, trazidas pelo vento, chuva ou mesmo roupas de banho ou equipamentos contaminados. Para tratar a água da piscina, utiliza-se um desinfetante muito popular: o cloro, na forma de compostos químicos como hipoclorito de cálcio (um sólido) ou hipoclorito de sódio em solução (um líquido). Quando este agente é adicionado à água, o hipoclorito reage com a água para formar principalmente o ácido hipocloroso, que mata as bactérias e outros patógenos.

Conforme *site* especializado no assunto, temos alguns tipos de Algicidas:

1	**Compostos de Amónio Quaternário**	Um tipo de baixo grau de algicida, **que representa 10% de ingrediente ativo**.
2	**Polímeros**	Os polímeros são cadeias longas e complexas de produtos químicos e encontram-se disponíveis sob a forma de força por porcentagem **(variam entre 30% a 60% de concentração)**.
3	**À base de cobre:**	Disponível em formato isento de espuma **com força de 3% a 10%**.

Fonte de consulta: http://www.vendapiscinas.com/problemas-de-algas.html. Acessado em 20/06/2011.

Ou seja, a concentração de determinado produto químico é apresentada em porcentagem. Além desta aplicação prática, veremos outras na sequência dos nossos estudos sobre porcentagem.

Dada essa importância vejamos alguns exemplos da representação em porcentagem versus a representação na forma de razão e o equivalente em decimal, isso significa que todas as representações são equivalentes, apenas são apresentadas em formatos numéricos diferentes:

Representação	Exemplo de situação usual
50%	Para realizar o financiamento é necessário que 50% do valor total sejam dados de entrada no negócio.
½	Para cada 1/2 kg de carne adicionar 10g de tempero pronto.
0,5	Para que a divisória encaixe, precisamos tirar 0,5cm da lateral.
Metade	Governo Federal reduziu pela metade dinheiro destinado ao pagamento de diárias aos funcionários públicos.

Note que a tabela traz diferentes situações que são representadas pelo mesmo conceito de "metade". Porém cada situação exposta pede uma diferente representação, por exemplo, não seria adequado dizer: "emagreça 50% de um quilograma por dia". Para o nosso caso específico utilizaremos amplamente a notação de porcentagem, por estar intimamente relacionada com o sistema monetário que está definido como número decimal posicional.

Toda razão da forma $\frac{a}{b}$ na qual o denominador b = 100, é chamada taxa de porcentagem ou simplesmente porcentagem ou ainda percentagem.

Historicamente, a expressão por cento aparece nas principais obras de aritmética de autores italianos do século XV. O símbolo % surgiu como uma abreviatura da palavra cento utilizada nas operações mercantis.

Para indicar um índice de 50 por cento, escrevemos 50% de modo formal e isto significa que em cada 100 unidades de algo, tomaremos 50 unidades, ou seja, **a metade**.

Outro exemplo prático se dá no momento que pagamos ao garçom a taxa de serviço, gorjeta, enfim, os famosos 10%.

Supondo que tenha saído para almoçar em um restaurante, se for comunicado que os 10% são prática da casa, simulemos a seguinte situação de uma conta de R$80,00:

O cálculo de 10% de 80, por exemplo, pode ser obtido como o produto de 10% por 80, isto é:

$$10\% \times 80 = \frac{10}{100} \times 80 = \frac{800}{100} = 8.$$

Sendo assim, basta dividir por 10 o valor da conta, resultando em R$8,00 e somar este resultado ao total consumido:

R$8,00 + R$80,00 = R$88,00.

Em geral, para indicar um índice de M por cento, escrevemos M% e para calcular M% de um número N, realizamos o produto:

$$\text{Produto} = M\%.N = \frac{M.N}{100}$$

Desafio matemático

A conta do restaurante

Três amigos foram comer num restaurante e no final a conta deu R$30,00. Fizeram o seguinte: cada um deu R$10,00. O garçom levou o dinheiro até o caixa e o dono do restaurante disse o seguinte:

Figura 17.1 – Moeda de um real.
Fonte:http://vidadeengenheiro.wordpress.com.

– *"Esses três são clientes antigos do restaurante, então vou devolver R$5,00 para eles..."*

E entregou ao garçom cinco notas de R$1,00. O garçom, muito esperto, fez o seguinte: pegou R$2,00 para ele e deu R$1,00 para cada um dos amigos. No final cada um dos amigos pagou o seguinte:

R$10,00 – R$1,00 que foi devolvido = R$9,00.

Logo, se cada um de nós gastou R$9,00, o que nós três gastamos juntos, foi R$27,00. E se o garçom pegou R$2,00 para ele, temos:

Nós: R$27,00
Garçom: R$2,00
TOTAL: R$29,00

Pergunta-se: onde foi parar o outro R$1,00?

Fonte: http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=274. Acessado em 21/06/2011

Alguns exemplos para treinar e aprender

Exemplo 1

Um fichário tem 25 fichas numeradas, sendo que 52% dessas fichas estão etiquetadas com um número par. Quantas fichas têm a etiqueta com número par? Quantas fichas têm a etiqueta com número ímpar?

Solução:

Etiquetas Pares = 52% de 25 fichas = 52% vezes 25 = $\frac{52 \times 25}{100}$ = 13. O restante, (100% – 52% = 48% é de fichas número ímpar)

Poderíamos ainda calcular o valor de 50% e acrescentar 2% (1% + 1%) , vejamos: (metade de 25) 50% de 25 = 12,5 + (a centésima parte de 25) 1% de 25 + 1% de 25 = 0,5.

A soma 12,5 + 0,5 = 13.

Nesse fichário há 13 fichas etiquetadas com número par e 12 fichas com número ímpar.

Exemplo 2

Num torneio de basquete, uma determinada seleção disputou quatro partidas na primeira fase e venceu três. Qual a porcentagem de vitórias obtida por essa seleção nessa fase?

Solução:

Vamos indicar por X% o número que representa essa porcentagem. Esse problema pode ser expresso da seguinte forma: X% de 4 partidas = 3 partidas.

Assim temos:

$$\frac{X}{100} \times 4 = 3$$

$$\frac{4X}{100} = 3$$

$$4X = 300$$

$$X = 75$$

Ou ainda poderíamos utilizar o conceito de proporção: $\frac{3}{4}$ = 0,75, ou seja, na primeira fase a porcentagem de vitórias foi de 75%.

A representação por meio da regra de três também resolve a questão e fica mais fácil compreender que a "regra de três" não passa de uma proporção simples e direta:

100% $\rightarrow$ 4 partidas

X% $\rightarrow$ 3 partidas

Ou ainda a representação por meio de razões (frações) proporcionais:

Exemplo 3

Numa indústria há 255 funcionárias. Esse número corresponde a 42,5% do total de empregados da indústria. Quantas pessoas trabalham nesse local? Quantos funcionários trabalham nessa indústria?

Solução:

Vamos indicar por X o número total de empregados dessa indústria. Esse problema pode ser representado por: 42,5% de $X = 255$

Assim temos:

$42{,}5\% \text{ x } X = 255$

$\frac{42{,}5}{100} \text{ x } X = 255$

$\frac{42{,}5 \text{ x } X}{100} = 255$

$42{,}5 \text{ x } X = 25500$

$425 \text{ x } X = 255000$

$X = \frac{255000}{425} = 600$

Nessa indústria trabalham 600 pessoas, sendo que há 345 homens (600 – 255).

Exemplo 4

Ao comprar uma mercadoria, obtive um desconto de 8% sobre o preço marcado na etiqueta. Pagou-se R$690,00 pela mercadoria. Qual o preço original dessa mercadoria?

Solução:

Seja X o preço original da mercadoria. Se obtive 8% de desconto sobre o preço da etiqueta, o preço que paguei representa 100% – 8% = 92% do preço original e isto significa que 92% de $X = 690$.

Assim temos:

$$92\% \times X = 690$$

$$\frac{92}{100} \times X = 690$$

$$92.X \times 100 = 690$$

$$92 \times X = 69000$$

$$X = \frac{69000}{92} = 750$$

O preço original da mercadoria era de R$750,00.

É importante saber

Percentagem x Porcentagem

É opcional dizer percentagem (do latim per centum) ou porcentagem (em razão da locução 'por cento'). Mas só se diz percentual. Com as expressões que indicam porcentagens o verbo pode ficar no plural ou no singular, conforme o caso, já que a concordância pode ser feita com o número percentual ou com o substantivo a que ele se refere.

Por Maria Tereza de Queiroz Piacentini, disponível em:
http://kplus.cosmo.com.br/materia.asp?co=49&rv=Gramatica, acessado em setembro de 2009.

Resumo

Vimos a importância do uso da porcentagem (ou percentagem) no nosso dia a dia para expressarmos determinados cálculos e raciocínios e as várias formas de calculá-la em diversas situações que se apresentam.

Atividades de aprendizagem

- A porcentagem é muito utilizada para "pedir desconto".
  Que outras situações podem ser utilizadas com a representação em por cento?

Anotações

Aula 18 – Probabilidade I

Nesta aula trataremos de discutir algumas ideias fundamentais sobre a Probabilidade, em especial o princípio da contagem como teoria fundamental no cálculo de possibilidades. Além de organizar e bem estruturar questões relativas à compreensão de palavras cotidianas, tais como: chance, amostra, sorte e contagem.

Você já deve ter ouvido situações onde nos parece que a sorte é o principal argumento válido para explicar um acontecimento. Além de que junto com a sorte vem também o azar.

Da mesma maneira que tenho a sorte de encontrar uma nota de R$50,00 no chão caminhando pelas ruas da cidade, tenho o azar de tropeçar em um paralelepípedo mal colocado na calçada. E tem mais! Qual é a "chance" de encontrar o mesmo valor em dinheiro caminhando por uma trilha, mata adentro? Da mesma maneira, qual seria a "chance" de tropeçar em algum obstáculo em meio a uma trilha, mata adentro?

Precisamente podemos chamar a essa "chance" como a **probabilidade** de algo acontecer. O sentido dessa palavra é mais "matemático" por envolver cálculos fundamentados na teoria das probabilidades, proposto inicialmente no livro *De ratiociniis in ludo aleae* (Sobre o raciocínio em jogos de dados) publicado pelo matemático holandês Christiaan Huygens (1629-1695) e posteriormente revisto pelo francês Pierre Simon de Laplace (1749-1827) com o livro *Théorie analytique des probabilités* (Teoria analítica das probabilidades). Desde então a teoria das probabilidades vem contribuindo para resolver problemas de aplicação, relativos à estatística, engenharia, física, teoria dos jogos estratégicos, sociologia, psicologia, biologia, direito entre outros.

Voltemos ao problema da probabilidade de encontrar uma nota de R$50,00 no chão das ruas de uma cidade. Vários fatores podem ser levados em consideração, como por exemplo, a rua fica no centro da cidade? Fica próxima de algum banco? A nota pode ser falsa? Empiricamente podemos responder tais perguntas e, tomados de relativa certeza, afirmar que a probabilidade de encontrar uma nota de R$50,00 em frente a um banco da região comercial de uma cidade é maior do que encontrar R$50,00 caminhando em uma trilha mata adentro.

Você está convencido? Convencida? Duvidaria de tal afirmação? E se afirmasse que em minha recente caminhada por uma trilha mata adentro tivesse encontrado uma nota de R$50,00, seria impossível? O que posso afirmar é que foi muita sorte. Sorte minha, azar daquele que a perdeu?

A capacidade de se comunicar por meio de razões probabilísticas melhor fundamenta o discurso daquele que deseja convencer outrem de que sua afirmação merece atenção e pode ser considerada plausível de acontecer.

Conforme anunciamos no início deste capítulo a teoria da probabilidade tem raízes históricas nos jogos com dados. Sendo assim, analise a seguinte situação: ao lançar seis vezes um dado para o alto, qual a probabilidade de cair no solo e aparecer na face oposta à quantia um?

Algumas considerações podem ser feitas para melhor entender quais são as variáveis da situação e quais são as constantes no lançamento de um dado.

A tabela seguinte procura destacar melhor a situação proposta.

Variáveis no lançamento de um dado	Constantes no lançamento de um dado
Número de faces (existem dados com mais de seis faces).	Dado com formato cúbico: número de faces igual a seis.
Faces opostas modificadas para que o dado "tenda" a cair para determinada face: dado viciado.	Faces opostas congruentes com distribuição equivalente de massa e peso.
Sorte e azar.	Soma das quantidades das faces opostas de um dado sempre igual a sete.

Ao lançar um dado não viciado ao alto, lançamos a sorte (ou azar) de cair "um" na face oposta à apoiada no solo. A probabilidade de tal fato ocorrer é intuitiva. De fato um dado de formato cúbico tem seis faces e somente uma tem a quantidade "um" marcada. Dessa maneira lançando ao alto, seis vezes o dado, existe uma chance em cada seis lançamentos de a face ser "um". Ou seja, a probabilidade de a face oposta à face apoiada no solo ser "um" é uma em seis, a razão probabilística é indicada por: $\frac{1}{6}$.

No caso do lançamento de um dado, não há certeza absoluta (100% de chance) de que ocorra, em seis lançamentos, a face "um". Porém, a probabilidade disso ocorrer é igual a "um para cada seis" que em porcentagem significa, aproximadamente, 17% de chance de isso ocorrer. Quanto menor a porcentagem, menor é a chance de o fato ocorrer. Sendo assim é a sorte quem determina que, por exemplo, no primeiro lançamento do dado caia a face "um".

O fato de existir sorte e azar nos jogos fascina seus praticantes mais fervorosos. Afinal, quem não gostaria de ser o sortudo que ganhará o próximo prêmio da loteria federal? A esse estudo matemático de chances em situações de jogos e, por que não de situações cotidianas relacionadas à pesquisa de opinião pública e coleta de dados dos fenômenos da natureza definimos com sendo a relação entre a teoria das probabilidades e a teoria estatística. É o que pretendemos discutir nos capítulos seguintes.

Entender probabilidade e estatística requer paciência e compromisso. Tendo em vista que as soluções dos problemas não são meramente resultado de um algoritmo, enfatizamos que a cada atividade realizada seja verificada a validade do resultado apresentado. Note que, em um lançamento de dados com formato cúbico, não é de bom senso lógico afirmar que existe a probabilidade de a face ser sete.

Resumo

Iniciamos o entendimento sobre probabilidade, de como ela está presente em diversas situações e a representamos através do dado, objeto presente em muitas de nossas casas.

Atividades de aprendizagem

- Para pensar e resolver: crie uma situação semelhante àquela do lançamento de um dado. Por exemplo, ao invés de aparecer face oposta ao solo igual a "um", o que aconteceria se a aposta fosse a face "seis"? Qual a probabilidade de cair faces pares? E ímpares? E faces opostas com soma igual a sete? Registre suas observações para eventualmente discutir no fórum da disciplina.

Aula 19 – Probabilidade II

Vamos retomar o estudo da probabilidade, ampliando os exemplos para entendermos a complexidade que podemos encontrar em nosso estudo e em situações diárias do nosso cotidiano.

Retomando a ideia de variáveis e constantes em um problema, o que mais poderíamos variar em um problema com dados não viciados?

Uma ideia seria acrescentar mais um dado para verificar se a probabilidade aumenta a maneira que lançamos mais dados. Por exemplo: qual é a probabilidade de cai face oposta ao solo "um" no lançamento de dois dados? A primeira questão é: quais as variáveis e constantes do problema?

A tabela seguinte traz algumas afirmações possíveis:

Variáveis no lançamento de dois dados	Constantes no lançamento de dois dados
Número de faces (existem dados com mais de seis faces).	Dado com formato cúbico: número de faces igual a seis.
Faces opostas modificadas para que o dado "tenda" a cair para determinada face: dado viciado.	Faces opostas congruentes com distribuição equivalente de massa e peso. Por mais parecidos que sejam os dados não são iguais.
Sorte e azar.	Soma das quantidades das faces opostas de um dado sempre igual a sete.
Os dados são lançados simultaneamente ou lançados um de cada vez.	Total de combinações entre as faces.

Ao lançar dois dados não viciados, simultaneamente ao alto, lançamos a sorte (ou azar) de cair "um" na face oposta à apoiada no solo. A probabilidade de tal fato ocorrer não é intuitiva! A questão é: sendo que um dado de formato cúbico tem seis faces os dois tem a quantidade "um" marcada. Dessa maneira lançando ao alto os dados, existem "n" chances de a face ser "um", seja em um dado quanto no outro.

A questão principal da situação apresentada é: qual o total de combinações possíveis entre as faces no lançamento de dois dados?

Ao lançar dois dados temos o seguinte quadro de possíveis combinações entre as faces:

1 e 1	1 e 2	1 e 3	1 e 4	1 e 5	1 e 6
2 e 1	2 e 2	2 e 3	2 e 4	2 e 5	2 e 6
3 e 1	3 e 2	3 e 3	3 e 4	3 e 5	3 e 6
4 e 1	4 e 2	4 e 3	4 e 4	4 e 5	4 e 6
5 e 1	5 e 2	5 e 3	5 e 4	5 e 5	5 e 6
6 e 1	6 e 2	6 e 3	6 e 4	6 e 5	6 e 6

Ou seja, temos 36 possíveis combinações entre as faces de dois dados. Pelo princípio multiplicativo nota-se que seis faces de um dado, vezes seis faces do outro dado é igual a 36. De forma geral $C = N_f \times N_f = N_f^2$.

Sendo assim a probabilidade de a face oposta à face apoiada no solo ser "um" no lançamento de dois dados é duas (uma em cada dado) em 36, a razão probabilística é indicada por: $\frac{2}{36}$. Que é equivalente a $\frac{1}{18}$.

No caso do lançamento de dois dados, não há certeza absoluta (100% de chance) de que ocorra, em 36 lançamentos, a face "um" nos dois dados simultaneamente ou em um dos dois dados. Porém, a probabilidade disso ocorrer é igual a "dois para cada trinta e seis" (ou um para cada dezoito) que em porcentagem significa aproximadamente 5,6% de chance de isso ocorrer. Sendo assim é a sorte quem determina que, por exemplo, no primeiro lançamento do dado caia a face "um" simultaneamente nos dois dados. Note que no quadro de combinações só existe uma possibilidade de aparecer "1 e 1", assim a probabilidade de as duas faces opostas ao solo serem "1 e 1" simultaneamente é: "uma em trinta e seis", representada pela razão: $\frac{1}{36}$ que corresponde a uma probabilidade de aproximadamente 2,8% de chance disso ocorrer. Senhores façam suas apostas!

A teoria da probabilidade aparece em toda parte, uma simples conversa sobre os chamados "jogos de azar" já dá indícios que a ideia de sorte e chances é forte e aguçam a curiosidade.

É de se esperar que o poder de persuasão que um resultado probabilístico causa pode ser erroneamente aceito com absoluto e determinista.

A perspectiva probabilística é fundamental para que se tenha clareza e segurança nos estudos dos dados coletados tanto para grandes populações como para amostras menos significativas. Não obstante, servem para esclarecer fenômenos da natureza que se modificam sem a preocupação com a sorte e o azar. A intuição é amplamente recomendada na resolução de problemas envolvendo probabilidade, para problemas envolvendo muitas variáveis, faz-se necessário um estudo mais aprofundado de probabilidade condicional, multiplicação de probabilidades, reunião e interseção de eventos.

Resumo

Em diferentes níveis de ensino, a intuição pode ser trabalhada. Desde que o princípio fundamental da contagem seja apresentado, é possível desenvolver um trabalho de exploratório referente à análise de problemas de combinação e permutação simples. Problemas como: "Tenho três blusas e três calças, de quantas maneiras diferentes posso me vestir?" são altamente intuitivos. A questão é enriquecer as discussões com esquemas, desenhos das possibilidades, sem ter que recorrer a fórmulas e definições prontas.

Concluindo essa aula, apontamos algumas reflexões para o porquê aprender Probabilidade de forma intuitiva, além de ressaltar a importância de ter clareza das variáveis e constantes em um problema de pensamento probabilístico.

Atividades de aprendizagem

- Pesquise qual é a probabilidade de um indivíduo sozinho ganhar o prêmio máximo da Mega Sena da Caixa Econômica Federal?

Aula 20 – Cálculo de áreas – Geometria métrica plana

Vamos aprender, de forma bastante prática, como calcular uma área e qual a importância desses cálculos para nosso cotidiano.

Em que situações o cálculo de áreas é importante?

Vamos a um exemplo prático:

O cálculo do consumo de tintas: o que fazer para não errar nas quantidades e não perder dinheiro.

Para saber a quantidade de tinta é preciso levar em conta as dimensões da superfície que se deseja pintar.

Além disso, para que fique uniforme, sem manchas de pincel e irregularidades será necessário calcular o número de "demãos".

Vamos a um exemplo:

Um imóvel de $105m^2$ de área construída (área de planta) tem três quartos (uma suíte), sala de jantar, sala de estar, cozinha e lavanderia.

Consideremos que os banheiros, cozinha e lavanderia serão revestidos com cerâmica, deste modo dispensam o uso de tinta.

Figura 20.1 – Casa sendo pintada.
Fonte: www.sxc.hu.

Portanto: área construída dividida pelo número de cômodos:

$105m^2 : 5 = 21m^2$ (área média de cada cômodo a ser pintado).

Este valor será multiplicado por um número (fator). Observe a tabela seguinte e note que a área de 21 m^2 está compreendida no intervalo de 20,01 a 25,00 m^2 por cômodo, o que corresponde ao fator: 3,2 (incluindo paredes e tetos).

Tabela para Determinação da Área de Pintura (m²)		
ÁREA MÉDIA DE CADA CÔMODO (m²)	FATOR – ÁREA DE PINTURA – PAREDES E TETOS (INTERNO)	FATOR – ÁREA DE PINTURA SOMENTE PAREDES (INTERNO)
4,01 a 5,00	5,8	4,8
5,01 a 6,00	5,4	4,4
6,01 a 7,00	5,0	4,0
7,01 a 8,00	4,8	3,8
9,01 a 10,00	4,4	3,4
10,01 a 12,00	4,1	3,1
12,01 a 14,00	3,9	2,9
14,01 a 16,00	3,7	2,7
16,01 a 18,00	3,5	2,5
18,01 a 20,00	3,4	2,4
20,01 a 25,00	3,2	2,2
25,01 a 30,00	3,0	2,0
30,01 a 35,00	2,8	1,8
35,01 a 40,00	2,7	1,7
40,01 a 45,00	2,6	1,6
45,01 a 50,00	2,5	1,5
50,01 a 60,00	2,4	1,4
60,01 a 70,00	2,3	1,3
70,01 a 80,00	2,2	1,2
80,01 a 100,00	2,1	1,1

Fonte: Suvinil. Retirado de: http://construbasico.com/main/?p=3, acessado em 13 de julho de 2011.

Multiplica-se, então, esse fator pelo total de área construída:

105m² x 3,2 = 336m² é a área de referência para a pintura.

Ainda cabe calcular a área de pintura somente das paredes, sem tetos. Deste modo o fator é menor, passa a ser 2,2:

105m² x 2,2 = 231,00m².

Cálculo da pintura externa:

Figura 20.2 – Delimitação de perímetro com arame farpado.
Fonte: http://3.bp.blogspot.com.

Neste ponto encontramos um ponto interessante no cálculo de áreas. O contorno das figuras, ou a soma das medidas de todos os lados é chamado de perímetro.

A palavra vem do latim *perimetros*, que por sua vez deriva de um conceito grego de periferia "aquilo que está ao redor". Refere-se ao contorno de uma superfície ou uma forma da extensão desse limite.

Em outras palavras, em um polígono, o perímetro é a soma das medidas de todos os lados. É um conceito muito importante, assim como o conceito de área, são cálculos semelhantes. Enquanto que com o perímetro podemos calcular a quantidade de material a ser utilizado nas bordas de uma superfície, a área será a quantidade possível de sua superfície interna. Assim, o perímetro vai nos dizer a quantidade de arame para cercar um campo, enquanto que a área irá fornecer informações sobre como podemos semear o campo ou a quantidade de fertilizante a ser usado dentro deste limite.

Para calcular o perímetro de uma figura plana (polígono), você deve saber as dimensões de todos os lados. Por exemplo: um triângulo com lados 3 metros, 8 metros e 9 metros, tem um perímetro (contorno) de 20 metros.

Aplicação prática - Situação 1

Pintura externa da casa

Meça todo o perímetro, contorno do imóvel, que será pintado, e multiplique pela altura.


Figura 20.3 – Pintura da fachada.
Fonte: http://3.bp.blogspot.com.

Uma aproximação bem rudimentar e pouco precisa, é a chamada técnica do "passo", levando em conta que cada passo possui cerca de 1,00 metro, basta contar quantos passos se dá para contornar a casa.

Exemplo:

Em um imóvel de 105m², imaginemos um contorno de 70 passos. Considerando que a altura das paredes é de mais ou menos 2,70m, temos:

70 passos, aproximadamente 70m x 2,70m = 189,00m²

Cálculo do consumo de tinta para as situações apresentadas:

Após definir o produto ou sistema de pintura e determinar a metragem quadrada (m^2) da superfície a ser pintada, fica faltando apenas calcular a quantidade de tinta (volume a ser adquirido).

Levando em conta os dados do primeiro exemplo:

A = área calculada: $336{,}00m^2$

R = rendimento do produto de acordo com a embalagem: $200m^2$ por lata

N = número de demãos: 2

Sabendo que a lata de 18 litros de tinta látex rende cerca de $200m^2$ por demão, o volume de tinta necessário para a pintura interna será de:

$A = 336{,}00m^2$

$R = 200m^2 : N = 2$

$\frac{200}{2} = 100$ (quociente a ser aplicado *versus* número de demãos)

Volume total de tinta = $336{,}00m^2 : 100 = 3{,}36$ latas a serem adquiridas para a pintura interna.

Vamos praticar?

- Calcule a quantidade de tinta, em galões (3,6 litros), a serem adquiridos para a pintura externa da casa com a metragem citada no exemplo anterior.

Situação 2

Cálculo da área de um trapézio.

Na fotografia seguinte, mostramos o gradeamento de ferro de uma janela. Na parte central desse gradeamento observam-se dois quadrados com o mesmo centro. Os vértices do quadrado menor estão situados nos pontos médios das semidiagonais do quadrado maior.

A presença de um trapézio é mais comum do que imaginamos.

Apesar de figuras mais simples estarem sempre presentes no nosso cotidiano, destacamos que em situações reais, vamos nos deparar com áreas de polígonos irregulares.

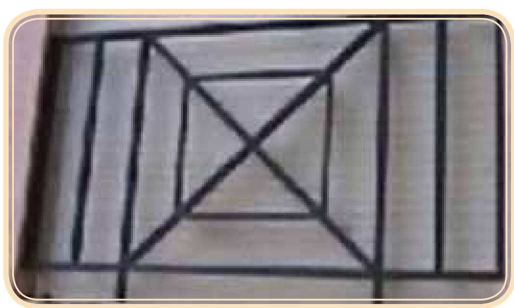


Figura 20.4 – Grade de ferro.
Fonte: Acervo do autor.

Observa o seguinte esquema do gradeamento da janela.

Sendo que a área do quadrado ABCD é de 6400cm^2. Como calcular a área do trapézio AEFB em destaque?

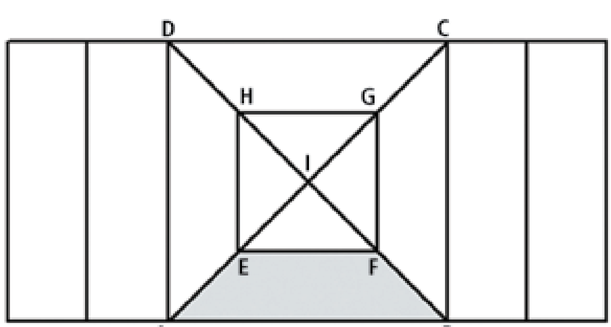
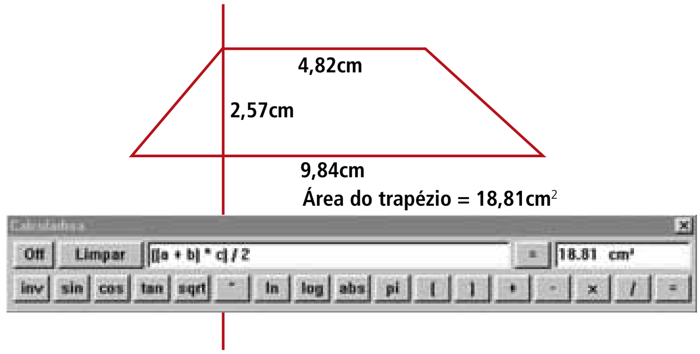


Figura 20.5 – Desenho da grade.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Para calcular a área de um trapézio, podemos utilizar a seguinte fórmula: $\frac{(B + b) \times a}{2}$, onde "*B*" é a base maior, "*b*" é a base menor e "*a*" altura do trapézio.

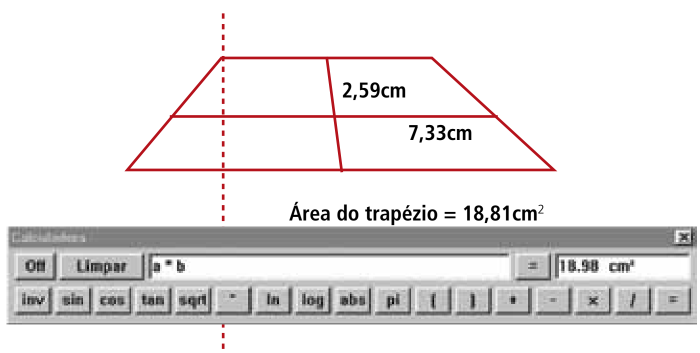


Mas existe uma maneira mais fácil?

Imaginamos que sim.

No lugar de decorar fórmulas é possível, de forma intuitiva, utilizar outra maneira, diferente, que é mais prática.

Para calcular a área simplesmente multiplicaremos as medidas dos "meios" da figura:



Assim, trabalharemos de forma intuitiva para construir as fórmulas para o cálculo da área dos polígonos, sejam eles regulares ou irregulares.

Não pretendemos apresentar um quadro com todas as fórmulas para calcular as áreas dos mais diversos polígonos.

Nossa intenção é construir durante as teleaulas cada relação apenas tomando como base os conceitos de altura, largura e/ou comprimento.

Resumo

Calcular áreas faz parte de muitas das nossas atividades profissionais ou pessoais, direta ou indiretamente. Por isso demos início a este estudo, através de um método prático, em que se dispensa decorar fórmulas. Assim aprendemos a calcular áreas de quadrados, retângulos e trapézios.

Atividade de aprendizagem

- A pintura das paredes de uma casa utiliza conceitos de geometria métrica plana. Que outros exemplos práticos podem ser relacionados ao cálculo de áreas?

Anotações

Referências

BOYER, Carl B. (1996) - História da Matemática. Editora Edgard Blucher

CARVALHO B. L., Etnomatemática: Alguns Conhecimentos Matemáticos Usados nas Práticas Profissionais de Um Pedreiro e Um Eletricista. Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática, 2008.

CARVALHO, B. A. Desenho Geométrico. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1993.

COLE, K. C.. O Universo e a Xícara de Chá. São Paulo: Record, 2006. 294p.

DANTE, L.R. Matemática: Contexto de Aplicações. São Paulo: Editora Ática, 1999.

EVES, Howard. (1995) - Introdução à História da Matemática. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP. Editora da Unicamp.

GIONGO, Affonso R. Curso de Desenho Geométrico. 32a ed, São Paulo: Nobel, 1989.

IFRAH Georges (1985) - Os números: A história de uma grande invenção, Editora Globo, 3a.edição

LIVIO, Mario. Razão áurea: a história do phi. São Paulo: Record, 2006. 336p.

MEDEIROS JUNIOR, Roberto José. Matemática Financeira – Livro ETEC-Brasil, 2010. 2ª Edição.

PENNER, R. C. (1999), Discrete Mathematics: Proof Techniques and Mathematical Structures, River Edje: World Scientific, ISBN 981-02-4088-0

PUTNOKI, José Carlos. Elementos de Geometria e Desenho Geométrico. 4a ed, São Paulo: Scipione, 1993.

REZENDE, Eliane Q. F. Geometria euclidiana e construções geométricas. Campinas: Ed. Unicamp, 2000.

VIANNA C. R. & CURY H. N. Revista História & Educação Matemática, v.1, n.1, pp. 23-37, jan. / jun. 2001. Ângulos: uma "História" escolar.

WAGNER, E. Construções Geométricas. CPM-SBM, 2000.

Referências das imagens

Figura 1.1 – Bastão de Ishango.
Fonte:http://m2.paperblog.com/i/50/502247/losso-di-ishango-L-94v196.jpeg.

Figura 1.2 – Escrita romana dos números.
Fonte: www.smartkids.com.br/especiais/numeros-romanos.html.

Figura 1.3 - Profissional de agrimensura.
http://4.bp.blogspot.com/_2un8XD50HMQ/S-IsFGBTRaI/AAAAAAAAAT4/555EuGJoSrc/s1600/agrimensura-IMAGEN-1.jpg

Figura 1.4 – Profissional de agrimensura.
Fonte: http://4.bp.blogspot.com/_2un8XD50HMQ/S-IsFGBTRaI/AAAAAAAAAT4/555EuGJoSrc/s1600/agrimensura--IMAGEN-1.jpg

Figura 1.5 – Desenho infantil.
Fonte: www.cinfop.ufpr.br/pdf/colecao_1/matematica_5.pdf

Figura 1.6 – Escritas rupestres.
Fonte: www.cidadesnanet.com/print.php?id=12787

Figura 1.7 – Correspondência biunívoca.
Fonte: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/66/Carneiros_2.JPG e www.stonetohome.com/media/gbu0/prodsm/Welsh%20Green%20Rockery.jpg

Figura 2.1 – Baile.
www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1155447

Figura 2.2 – Ideia de relação nos conjuntos.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 2.3 – Reta orientada.
Fonte: www.cefetrn.br/~assis/conjuntos/conjuntos1.html

Figura 2.4 – Diagrama dos conjuntos N, Z e Q.
Fonte: www.brasilescola.com/matematica/numeros-racionais.htm

Figura 2.5 – Imagem da reta numérica real.
Fonte: www.matematicadoensinofundamentalemedio.com/Conjunumericos.htm

Figura 2.6 – Representação dos conjuntos de modo resumido.
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 3.1 – Quadro com cálculos matemáticos.
Fonte: www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=2.

Figura 3.2 – Agenda de compromissos.
Fonte: www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1102027

Figura 3.3 – Agenda de compromissos no telefone celular.
Fonte: http://forum.zwame.pt/showthread.php?t=566805&page=3

Figura 3.4 - Calculadora.
www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1259849.

Figura 3.5 – As quatro operações.
Fonte:http://reforconoecerj.blogspot.com/2009/09/revisando-as-operacoes-matematicas.html.

Figura 3.6 – A boa idade.
Fonte: www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1186565

Figura 3.7 – Rampa do Planalto.
Fonte:http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/12/Palacio_do_Planalto.JPG.

Figura 3.8 – Multiplicação separando dezenas de unidades.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.1 – Área e volume.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.2 – Planta baixa de uma residência.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 5.1 – Representação feita pelos copistas, século XV.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 6.1 - Bolo de banana.
Fonte: http://appolloni.pt/wp-content/uploads/2010/04/015_bolo-banana.jpg.

Figura 6.2 – Chave de boca.
Fonte: www.swissknifeshop.com/media/catalog/product/cache/1/image/5e06319eda06f020e43594a9c230972d/l/t/ltmut_s_x1000.jpg.

Figura 6.3 – Anúncio de 50% de desconto.
Fonte: http://3.bp.blogspot.com/_CkZzDylRhj0/SaawLud8--I/AAAAAAAAAOg/5QY0NTygnoM/s400/banner.JPG

Figura 7.1 – Gráfico – ILHA DE MOSQUEIRO: Práticas de Pesca Sustentável numa Comunidade Tradicional da Amazônia – Estudo de Caso. Belém – Pará
Fonte: Trabalho de Conclusão de Curso (TCapresentado à Universidade Norte do Paraná – UNOPAR, PEDRO DA SILVA LEÃO, 2011.

Figura 7.2 – Gráfico em setores.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8.1 – Sapato de salto alto.
Fonte: http://tribodoesporte.com.br/wp-content/uploads/2010/11/salto_alto2.jpg.

Figura 8.2 – Sapato de salto alto.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8.3 – Salto alto tipo "agulha" – triângulo retângulo.
Fonte: www.alexis4u.com/images/Shoe/Pumps%20greater%20than%204%20inch/Brazil_High_Heels_Fuchsea_.JPG.

Figura 8.4 – Triângulos retângulos.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8.5 – Salto alto tipo "agulha".
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8.6 – Postura do tornozelo.
Fonte: Elaborado pelo autor. Adaptado.

Figura 9.1 – Comprimento dos calçados.
Fonte: Elaborado pelo professor.

Figura 9.2 – Pés desenhados em malha quadriculada.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 10.1 – Piscina rasa.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 10.2 – Relógio com transferidor.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 10.3 – Tangran.
Fonte: http://educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/como-construir-tangram.htm

Figura 11.1 - Transferidor.
Fonte: www.sodine.com.br/media/catalog/product/i/m/image_96.gif

Figura 11.2 – Retas paralelas.
Fonte: Acervo do autor.

Figura 11.3 – Curvas paralelas.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 11.4 – Triângulo com os elementos geométrico em destaque.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 11.5 – Alfabeto Grego.
Fonte: www.profwillian.com/_diversos/alfa_grego.asp.

Figura 12.1 – Geometria da colméia de abelhas.
Fonte: www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1147973

Figura 12.2 – Geometria dos flocos de neve.
Fonte: http://entranaciencia.blogspot.com/2009/01/neve-bela-e-rara-s-vezes.html.

Figura 12.3 – Lata de leite moça.
Fonte das imagens: www.nestle.com.br/moca/quememoca.aspx.

Figura 12.4 – MDF com estrutura inspirado na geometria da colméia.
Fonte: www.masisa.com/bra/por/produto/paineis/colmeia/2767/1808/

Figura 13.1 – Detalhe do compasso para caderno de Desenho Geométrico.
Fonte: www.papelariajussara.com/media/catalog/product/cache/1/image/9df78eab33525d08d6e5fb8d27136e95/j/u/jus003297ok.jpg

Figura 13.2 – Compasso e esquadro para quadro de giz.
Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/discovirtual/galerias/imagem/0000001501/0000017930.jpg

Figura 13.3 – Régua ou esquadro sem escala.
Fonte: www.trident.com.br/imagens/produtos/EsquadrodeAcrilicosemEscala_1272398649.jpg

Figura 14.1 – Superfície de uma bexiga.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 16.1 Esquadro com nível
Fonte: http://storemixbrasil.com.br/loja/product_info.php?products_id=224&osCsid=28b03e8d08fa40226199df9a9504f6f2

Figura 16.2 – Esquadro escolar.
Fonte: www.superofi.com/media/catalog/product/cache/8/image/500x500/9df78eab33525d08d6e5fb8d2713 6e95/2/0/20430_3_.jpg

Figura: 16.3 – Corda e nós.
Fonte: Banco de imagens DI.

Figura 16.4 – Corda e nós no triângulo retângulo.
Fonte: www.prof2000.pt/users/hjco/pitagora/pg000007.htm.

Figura 16.5 – Esquadrejar na prática do pedreiro.
Fonte: http://dicasparapedreiro.blogspot.com/2010/06/nocao-de-esquadro.html. Adaptado.

Figura 17.1 – Moeda de um real.
Fonte:http://vidadeengenheiro.wordpress.com/2011/04/03/se-acha-bom-em-matematica/

Figura 20.1 – Casa sendo pintada.
Fonte: www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=69465

Figura 20.2 – Delimitação de perímetro com arame farpado.
Fonte: http://3.bp.blogspot.com/_jG667uERbuY/TMgtqJQUn7I/AAAAAAAAABY/RsKutdPOhkc/s1600/Barbed+Wire+on+a+Stormy+Day.jpg

Figura 20.3 – Pintura da fachada.
Fonte: http://3.bp.blogspot.com.

Figura 20.4 – Grade de ferro.
Fonte: Acervo do autor.

Figura 20.5 – Desenho da grade.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Atividades autoinstrutivas

1. Um agricultor necessita cercar uma área retangular de $60m^2$ para plantio. Para obter o menor custo de arame, assinale a alternativa que representa a opção ideal para as medidas (lembrar da definição de perímetro):

a) 3m x 20m.

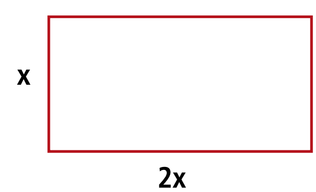
b) 4m x 15m.

c) 5m x 12m.

d) 6m x 10m.

e) 8m x 14m.

2. O hall de entrada de um prédio foi reformado. No piso foram usadas lajotas de formas retangulares e quadradas. Sabendo-se que nas lajotas retangulares a base é igual ao dobro de sua altura e que a sua área é igual a $5.000cm^2$, calcule as dimensões desta lajota.



a) 5cm e 10cm.

b) 5cm e 1.000cm.

c) 50cm e 100cm.

d) 10cm e 500cm.

e) 5cm e 100cm.

3. A professora Sincera propôs a seus alunos um jogo de lógica, cujo objetivo é indicar um número mediante descrição de suas características. Assim, alguns alunos apresentaram as seguintes soluções ao jogo da professora:

Aluno A – O meu número é formado por cinco algarismos. O algarismo de maior ordem corresponde ao menor número ímpar. O algarismo de menor ordem corresponde ao quádruplo do de maior ordem. Os algarismos intermediários correspondem a metade do de menor ordem numérica.

Aluno B – O meu número pode ser escrito na forma de uma fração ou de uma notação decimal. Esse número representa 50% do todo.

Aluno C – O meu número é composto pelo conjunto dos divisores naturais de 6 e representa o maior valor numérico.

Numere a coluna da direita com base na coluna da esquerda

1. O número é 12.224

2. O número é 6.321

3. O número é 0,5 ou ½

( ) O número pertence ao conjunto Q

( ) O número pertence ao conjunto N e não é par

( ) O número é par.

( ) O número corresponde ao aluno C

( ) O número corresponde ao aluno A

( ) O número corresponde ao aluno B

Assinale a sequência correta da coluna da direita, de cima para baixo.

a) 3; 2; 1; 2; 1; 3.

b) 3; 1; 2; 1; 2; 3.

c) 3; 1; 2; 2; 1; 3.

d) 3; 2; 1; 1; 2; 3.

e) 2; 1; 3; 3; 1; 2.

4. A professora de Matemática propôs aos seus alunos que construíssem a maquete da sala de aula, cujas medidas são 6m de largura, 12m de comprimento e 3m de altura. Para tanto, os alunos coletaram caixas de papelão de diferentes tamanhos, mas correspondendo a uma mesma figura espacial. Conforme a ilustração a seguir:

Após a análise das caixas, os alunos escolheram aquela que possibilitaria a construção da maquete na escala de 1 : 50. Qual caixa foi escolhida?

a) A caixa tem a forma de um paralelepípedo, cujo volume é de $216cm^3$.

b) A caixa tem a forma de um cubo, cujo volume é de $216cm^3$.

c) A caixa tem a forma de um paralelepípedo, cujo volume é de $1{,}728 \times 10^3cm^3$.

d) A caixa tem a forma de um paralelepípedo, cujo volume é de $1.728cm^3$.

e) A caixa tem a forma de um cubo, cujo volume é de $1.728cm^3$.

5. No supermercado "TemDetudo" uma mesma marca de sabão pode ser encontrada em três opções de embalagem: A – embalagem de 500g a R$3,80; B – embalagem de 1kg a R$6,90; C – embalagem de 2kg a R$13,95.

Com base nos dados apresentados, assinale a alternativa **correta**:

a) A opção A representa a melhor relação custo-benefício para o consumidor.

b) A opção A é mais vantajosa para o consumidor que a opção C.

c) A opção B representa a melhor relação custo-benefício para o consumidor.

d) A opção A e a opção B representam a mesma relação custo-benefício.

e) As três opções representam a mesma relação custo-benefício.

6. O gráfico mostra as receitas e despesas de uma empresa no ano de 2009.

Em relação ao gráfico, o bimestre em que a empresa teve seu pior desempenho foi o:

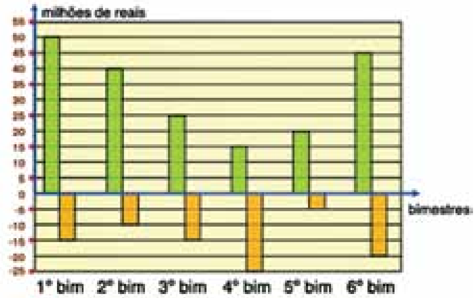
a) 1° bimestre.

b) 2° bimestre.

c) 3° bimestre.

d) 4° bimestre.

e) 5° bimestre.



7. Dona Melissa foi ao supermercado comprar filé de linguado. O quilo estava custando R$12,60. Ela pediu quatro filés e a balança marcou 0,450kg. O valor pago pela Dona Melissa ao supermercado foi de:

a) R$5,00.

b) R$5,67.

c) R$28,00.

d) R$28,67.

e) R$6,70.

8. Estes são os preços expostos numa padaria:

Presunto	R$ 10,00 por kg
Queijo prato	R$ 8,00 por kg
Salame	R$ 12,00 por kg
Peito de peru	R$ 16,00 por kg

Durante o dia foram vendidos $3\frac{3}{4}$kg de presunto, $2\frac{1}{4}$kg de queijo prato, $\frac{3}{4}$kg de salame e $\frac{1}{2}$ kg de peito de peru. O valor total (em R$) que recebeu a padaria por essas vendas está na alternativa:

a) 22,50.

b) 32.

c) 72.

d) 82,50.

e) 72,50.

9. Uma loja especializada em venda de parafusos comercializa o produto em pacotinhos com a mesma quantidade em cada um. O funcionário responsável pela organização dos pacotinhos de parafusos dispõe de um total de 30 parafusos para colocar em pacotinhos, sem que sobrem parafusos. Sabendo que cada pacotinho deve ter no mínimo quatro e no máximo 10 parafusos, de quantos modos diferentes ele poderá executar essa tarefa:

a) Três;

b) Quatro;

c) Cinco;

d) Seis;

e) Dez.

10. Um arquiteto projetou uma casa com a fachada em tijolos de vidro, sabendo que a parede tem 5,50m de altura e 3,57m de largura e, ainda, que os tijolos devem estar a 1,20m do chão e 0,80m do telhado e equidistantes das laterais a 0,90m. Calcule a quantidade aproximada mínima de tijolos de vidro para a construção desta fachada. Considere que cada tijolo tem 0,20m de lado.

a) 498 tijolos

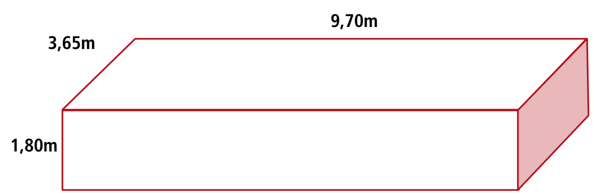
b) 154 tijolos

c) 155 tijolos

d) 490 tijolos

e) 491 tijolos

11. Um técnico em Pesca está dimensionando um tanque, para um criadouro. Este deverá ter 9,70m de comprimento por 3,65m de largura com uma profundidade de 1,80m, conforme a figura:



Em relação ao texto, analise as seguintes afirmativas:

I – O tanque comporta até 62,71 litros;
II – O tanque será azulejado internamente. A área total a ser azulejada é de 118,8 m²;
III – A medida da diagonal do tanque é igual a raiz quadrada da soma dos quadrados das três dimensões da piscina.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente a afirmativa I é verdadeira.

b) Somente a afirmativa II é verdadeira.

c) Somente a afirmativa III é verdadeira.

d) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.

e) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.

12. Jorge e Adriano uniram-se em uma sociedade para montar uma padaria, empregando respectivamente, capitais de R$100.000,00 e R$60.000,00. No primeiro mês de funcionamento a padaria obteve um lucro de R$4.280,00. Sabendo que o lucro será dividido proporcionalmente ao investimento que cada um fez, quanto coube a cada um?

a) A Jorge coube R$3.000,00 e a Adriano, R$1.280,00.

b) A Jorge coube R$2.280,00 e a Adriano, R$2.000,00.

c) A Jorge coube R$2.675,00 e a Adriano, R$1.605,00.

d) A Jorge coube R$3.280,00 e a Adriano, R$1.000,00.

e) A Jorge coube R$2.140,00 e a Adriano, R$2,140,00.

13. Ao medir, em um mapa, o trajeto de minha casa até a pizzaria mais próxima, encontrei a medida de 13cm. Sabendo-se que a escala do mapa é de 1 : 15.000, qual é a distância real desse trajeto em metros?

a) 19.500m.

b) 195.000m.

c) 5.000m.

d) 19,500m.

e) 50.000m.

14. Um profissional da área de Direito optou por trabalhar em um escritório de advocacia para ter garantia de receber mensalmente um salário fixo, independentemente da quantidade de clientes atendidos. O combinado foi um salário mensal de R$1000,00. A outra parte dos seus rendimentos mensais está em função dos honorários cobrados aos clientes que atende quando seus colegas não "dão conta" de atender, ou seja, o combinado é uma comissão de 6% sobre o valor total do honorário.

Nesse mês o advogado atendeu um cliente que teve como honorário total R$20000,00.

A alternativa que apresenta o salário do advogado no mês em questão é a da letra:

a) R$2200,00.

b) R$1200,00.

c) R$2000,00.

d) R$3200,00.

e) R$2350,00.

15. Com base nas ideias do texto sobre ângulos, assinale **V** (verdadeiro) ou **F** (falso):

( ) ângulo pode ser definido como medida da abertura entre duas semi--retas de mesma origem.

( ) ângulo notável é aquele que é mais aparente e usual, por exemplo, o ângulo de 30°, 45°, 60° e 90°.

( ) as definições mais recorrentes sobre ângulos por autores brasileiros estão relacionadas á semi-retas no plano .

( ) a unificação das teorias é o melhor caminho para conceituar, em uma só linha o entendimento teórico que se tem sobre ângulo.

( ) a definição de ângulo depende somente da formação do professor de matemática.

a) F, F, V, F e F.

b) V, F, V, F e V.

c) V, F, F, F e V.

d) V, V, V, F e F.

e) V, V, V, V e V.

16. Com relação às definições de ângulo, citadas nas aulas 12, 13 e 14, assinale **V** (verdadeiro) ou **F** (falso):

( ) O fato de que alguns autores definem "ângulo como raios que não estão na mesma reta", impede que os ângulos nulo e raso existam.

( ) Nulo e raso não podem ser classificados como ângulo por não ter origem bem definida.

( ) Ângulo é uma construção abstrata, sendo portanto impossível representá-lo fisicamente.

( ) O tangram é prova de que o ângulo pode ser representado de modo prático.

( ) Os arcos de circunferência, quando interceptados, também determinam ângulos .

a) F, F, F, V e V.

b) V, F, V, F e V.

c) V, F, F, V e V.

d) V, V, V, F e F.

e) V, V, V, V e V.

17. Com base nas definições sobre ângulo e bissetriz, assinale **V** (verdadeiro) ou **F** (falso):

( ) Bissetriz é semi-reta que, partindo do vértice de um ângulo o divide em dois ângulos de mesma abertura.

( ) O ideal é representar a bissetriz aritmeticamente (dividindo o ângulo por dois), sem recorrer à precisão da régua e do compasso.

( ) A precisão do traçado da bissetriz com o compasso é maior que a dos esquadros.

( ) Ângulo reto é o ângulo cujos lados pertencem a retas perpendiculares.

( ) O ângulo agudo é aquele terminado em gume ou em ponta, ou seja é pontiagudo.

a) F, F, F, V e V.

b) F, F, V, F e V.

c) V, F, V, V e V.

d) V, V, V, F e F.

e) V, V, V, V e V.

18. Ângulo é definido como:

a) A região de um plano concebida pela abertura de duas semi-retas que possuem uma origem em comum (denominada vértice do ângulo), dividindo este plano em duas partes.

b) A área entre duas semi-retas que se encontram em determinada região do plano.

c) Figura gerada por duas semi-retas que partem do mesmo ponto.

d) Ângulo é a região de um plano concebida pela abertura de duas semi-retas que possuem uma origem em comum, chamada vértice do ângulo

e) Todas as alternativas estão corretas.

19. Com base nas idéias do texto sobre o Desenho Geométrico com régua e compasso, assinale **V** (verdadeiro) ou **F** (falso) para as considerações seguintes e assinale a alternativa que contém, respectivamente, seu julgamento:

(   ) Independente do traçado, a régua e o compasso devem determinar arcos e ângulos no plano.

(   ) A vantagem de desenhar utilizando apenas régua e compasso é a redução de gastos com compra de materiais.

(   ) A precisão do compasso para a construção de ângulos é maior que a dos esquadros.

(   ) Régua sem escala é a régua que não tem dimensões.

(   ) As formas geométricas são construções exclusivas do homem.

a) F, F, V, F e F.

b) V, F, V, F e V.

c) V, F, F, F e V.

d) V, V, V, F e V.

e) F, F, F, F e F.

20. Com relação às etapas para se desenhar geometricamente, citadas no texto da aula 13, assinale **V** (verdadeiro) ou **F** (falso):

( ) A etapa mais importante é a definição e a caracterização das técnicas utilizadas.

( ) Aulas de DG podem ser ministradas sem régua e compasso.

( ) O que deve ser destacado é o desenho no quadro de giz, tela ou papel, pouco importam os passo para chegada na construção final.

( ) Desenho Geométrico é um "braço" da Matemática. Ou seja, totalmente dependente da Matemática.

( ) A sobreposição de arcos é comum em Desenho Geométrico, mas, deve ser evitada.

a) F, F, V, F e F.

b) V, F, V, F e V.

c) V, F, F, F e V.

d) V, V, V, F e V.

e) V, V, V, V e V.

21. Com base nas ideias do texto sobre aprender Desenho Geométrico, assinale **V** (verdadeiro) ou **F** (falso):

( ) Dependendo do traçado, a régua e o compasso podem determinar ângulos no plano.

( ) A vantagem de utilizar a técnica de traçados com régua e compasso é a de ter maior precisão em menor tempo.

( ) A precisão do compasso depende do posicionamento transversal do grafite.

( ) Régua sem escala é a régua que não tem unidades de medida padrão. Exemplo: centímetros.

( ) As formas geométricas são construções presentes na natureza e nas criações humanas.

a) F, V, V, F e F.

b) V, F, V, V e V.

c) V, F, F, F e V.

d) V, V, V, V e V.

e) V, F, F, F e F.

22. Sobre a utilização do compasso para desenhar geometricamente é **correto** afirmar que o compasso:

a) Permite que ângulos notáveis possam ser facilmente obtidos sem o auxílio do transferidor.

b) É mais interessante devido à beleza dos traçados.

c) Só devem ser utilizados, necessariamente, após a exploração dos esquadros e transferidor.

d) É mais bem empregado quando se deseja obter exclusivamente uma circunferência.

e) É inútil para traçados geométricos.

23. Em relação à imagem da bexiga (aula 13), onde desenhamos uma reta e um triângulo, é incorreto afirmar:

a) Dependendo do local onde é feito o traçado, tem-se uma perspectiva diferente das leis gerais.

b) A teoria dos espaços curvos rompeu com o paradigma da Geometria Euclidiana.

c) A soma dos ângulos internos de um triângulo no espaço curvo é sempre igual a 270°.

d) A soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser igual a 900°, dependendo do espaço adotado.

e) Na Geometria Euclidiana a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180º.

24. Com base nas idéias do texto sobre os polígonos, assinale **V** (verdadeiro) ou **F** (falso):

( ) Todo triangulo equilátero é também isósceles.

( ) Todo o quadrado é retângulo.

( ) Todo o losango é quadrado.

( ) Todo quadrado é losango.

( ) Independente do meio físico (espaço) a ser utilizado a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

a) F, F, F, V e V.

b) V, F, V, F e V.

c) V, F, F, V e V.

d) V, V, V, F e F.

e) V, V, V, V e V.

25. Com relação às retas paralelas e perpendiculares do espaço euclidiano, assinale **V** (verdadeiro) ou **F** (falso):

( ) Retas paralelas nunca se encontram no infinito.

( ) partindo de paralelas, construímos perpendiculares.

( ) partindo de perpendiculares, construímos paralelas.

( ) o ângulo reto e consequentemente as retas perpendiculares são as mais utilizadas nas construções arquitetônicas de todas as civilizações ocidentais.

( ) é impossível traçar retas paralelas apenas com régua.

a) F, F, F, V e V.

b) V, F, V, F e V.

c) V, F, F, V e V.

d) V, V, V, F e F.

e) V, V, V, V e V.

26. Com base nas ideias do texto sobre o ensino de Probabilidade, assinale **V** (verdadeiro) ou **F** (falso):

( ) Independente do problema, existem variáveis e constantes representativas aos dados apresentados.

( ) A teoria da probabilidade aparece em toda parte, uma simples conversa sobre os chamados "jogos de azar" pode suscitá-la.

( ) As possíveis combinações entre as faces de dois dados é 6 faces.

( ) A forma usual de representar um resultado em probabilidade é a porcentagem.

( ) Os resultados encontrados nas razões probabilísticas são sempre absolutos e indiscutíveis.

a) F, F, V, V e V.

b) F, F, V, V e F.

c) V, V, V, V e F.

d) V, F, V, V e V.

e) F, F, V, F e F.

27. Um vestido estava exposto em uma loja com preço de etiqueta de R$210,00. Um cliente, alegando que faria pagamento à vista, solicitou um desconto de 15% e foi atendido. Quanto pagou pelo vestido?

a) R$160,00.

b) R$178,50.

c) R$180,00.

d) R$190,00.

e) R$200,00.

28. Um funcionário recebe um salário base de R$800,00. Recebe um adicional de 5% por tempo de serviço sobre o salário base. Recebe também uma gratificação de chefia de 30% sobre o salário base. Desconta-se 10% de INSS sobre o salário total. Quanto recebe esse funcionário?

a) R$972,00.

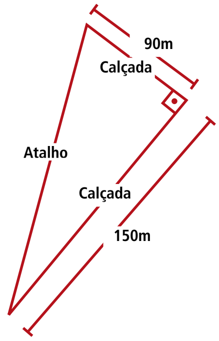
b) R$1000,00.

c) R$1080,00.

d) R$1090,00.

e) R$2000,00.

29. (UFPR, 2009) Em dias ensolarados, Melissa pega um atalho atravessando um parque nas proximidades de sua casa para chegar até a casa de sua amiga, conforme esquema seguinte. Em dias de chuva, ela prefere caminhar pela calçada. Em dias chuvosos, o número de metros a mais que Melissa anda até a casa de sua amiga é igual a:



a) 60m.

b) 90m.

c) 150m.

d) 180m.

e) 240m.

30. Quanto é 13% de 850 litros?

a) 130 litros.

b) 120,50 litros.

c) 110,50 litros.

d) 108 litros.

e) 100 litros.

31. Em uma mistura são necessários 30% de 640ml. A quantidade a ser separada em ml é igual a:

a) 182ml.

b) 192ml.

c) 198ml.

d) 207ml.

e) 300ml.

32. Um aluguel de R$550,00 sofreu um aumento de 18%. Ele passou a valer:

a) R$649,00.

b) R$612,00.

c) R$504,00.

d) R$99,00.

e) R$80,00.

33. (CESCEM-SP) 3% de 0,009 vale:

a) 0,00027.

b) 0,0027.

c) 0,00009.

d) 0,09.

e) 0,0081.

34. Assinale a sentença verdadeira:

a) $6\% = \frac{6}{100} = 0{,}6.$

b) $13\% = \frac{13}{100} = 1{,}3.$

c) $140\% = \frac{140}{100} = 1{,}4.$

d) $20{,}5\% = \frac{205}{100} = 0{,}0205.$

e) $1\% = \frac{10}{100} = 0{,}1.$

35. 10% de R$640,00 é igual a:

a) R$64,00.

b) R$19,00.

c) R$18,00.

d) R$20,70.

e) R$22,50.

36. Em um circo, os acrobatas desejam formar uma pirâmide humana com 20 andares, no qual o topo deve ter 1 acrobata, a segunda fila com 2 acrobatas, a terceira com 3 e assim sucessivamente até completar 20 andares. Com base nessas informações quantos acrobatas serão necessário para completar a pirâmide.

a) 2000 acrobatas.

b) 2100 acrobatas.

c) 210 acrobatas.

d) 200 acrobatas.

e) 220 acrobatas.

37. Em algumas zonas de Moçambique, na África, utiliza-se um método para construir retângulos sem efetuar medições. A ideia é a seguinte: "*esticam-se dois fios de igual comprimento, de forma que seus pontos médios coincidam - então os extremos dos fios determinam um retângulo*". (GERDES, 1992)

Para que os fios, coincidentes nos seus pontos médios, determinem um quadrado é necessário:

I. que os fios não tenham medida superior a 1 metro.
II. que os ângulos formados com os fios ao se interceptarem no ponto médio de ambos sejam retos.
III. Ique os fios determinem quatro triângulos congruentes.

Com base nas afirmações, é correto afirmar que:

a) Somente a I é verdadeira.

b) Somente a II é verdadeira.

c) As afirmações I e II são verdadeiras.

d) As afirmações II e III são verdadeiras.

e) As afirmações I e III são verdadeiras.

38. (IFPR) Um homem deixou sua herança distribuída da seguinte forma: um terço para sua esposa, metade para seu filho, um oitavo para o sobrinho e R$3.000,00 para um hospital. De quanto era sua herança?

a) R$36.000,00.

b) R$46.000,00.

c) R$52.000,00.

d) R$72.000,00.

e) R$84.000,00.

39. (FUVEST) Num bolão, sete amigos ganharam vinte e um milhões, sessenta e três mil e quarenta e dois reais. O prêmio foi dividido em sete partes iguais. Logo, o que cada um recebeu, em reais, foi:

a) R$3.009.006,00.

b) R$3.009.006,50.

c) R$3.090.006,00.

d) R$3.090.006,50.

e) R$3.900.060,50.

40. (USP) As crianças estão brincando de "vendinha" e, com uma tábua, improvisaram um cartaz. Nele escreveram:

- Uma caixa tem 5 balas.

- Um pacote tem 5 caixas.

- Joana comprou 3 pacotes, 2 caixas e mais 4 balas. Quantas balas, ao todo, ela comprou?
- Pedrinho quer comprar 32 balas.

a) Joana comprou 24 balas e Pedrinho 1 pacote, 1 caixa e 6 balas.

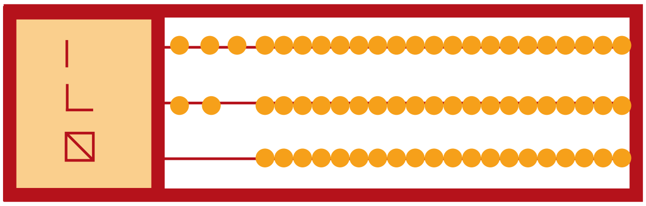
b) Joana comprou 29 balas e Pedrinho 1 pacote, 2 caixa e 1 bala.

c) Joana comprou 75 balas e Pedrinho 2 pacotes e 1 caixa.

d) Joana comprou 89 balas e Pedrinho 1 pacote, 1 caixa e 2 balas.

e) Joana comprou 57 balas e Pedrinho 3 pacotes e 1 caixa.

41. (USP) Pedro, Luiz e Ribamar estavam jogando sinuca e saíram para tomar um cafezinho, deixando, no quadro, a seguinte marcação:



Veja o que significa a marcação:

| ●●● Pedro: 23 pontos
∟ ●● Luiz: 42 pontos
⧄ Ribamar: 100 pontos

Em outra partida, Pedro, Luiz e Ribamar fizeram a seguinte marcação:

Pedro: ∟ ●●●
Luiz: □ ●●
Ribamar: ⧄ |

Quantos pontos fez cada um?

a) Pedro: 33; Luiz: 42; Ribamar: 51.

b) Pedro: 43; Luiz: 82; Ribamar: 120.

c) Pedro: 13; Luiz: 82; Ribamar: 120.

d) Pedro: 23; Luiz: 42; Ribamar: 51.

e) Pedro: 5; Luiz: 10; Ribamar: 80.

42. (USP) O grande compositor brasileiro Heitor Villa-Lobos, completou 18 anos em 1905. Em que ano Villa-Lobos nasceu?
Villa-Lobos nasceu em

a) Villa-Lobos nasceu em 1884.

b) Villa-Lobos nasceu em 1888.

c) Villa-Lobos nasceu em 1900.

d) Villa-Lobos nasceu em 1887.

e) Villa-Lobos nasceu em 1885.

43. (USP) Frederico foi até o supermercado comprar algumas coisas para sua mãe fazer bolo. Como ele é muito organizado, escreveu num papel o que precisava comprar e, na hora da compra, anotou ao lado o preço de cada mercadoria. Chegando em casa deixou o papel e as compras sobre a pia. Quando sua mãe foi conferir o pedido observou que alguns respingos de água haviam manchado um pouco o papel.
Descubra os preços da farinha e dos ovos.

farinha	0,
açúcar	0,50
ovos	,80
total	1,92

a) A farinha custa 0,62 reais e os ovos custam 0,80 reais.

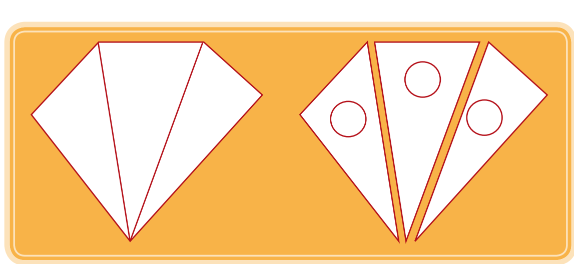
b) A farinha custa 1,50 reais e os ovos custam 0,35 reais.

c) A farinha custa 1,45 reais e os ovos custam 1, 36 reais.

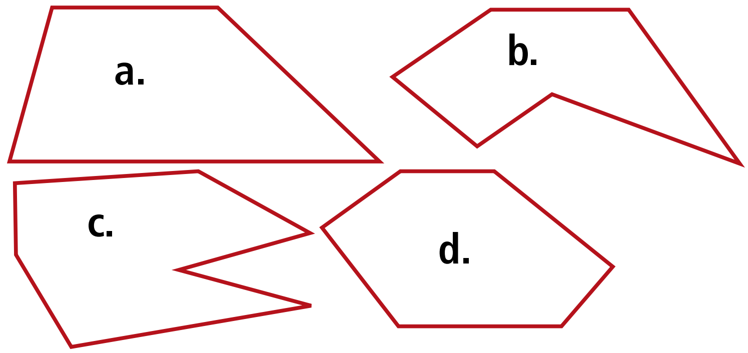
d) A farinha custa 0,24 reais e os ovos custam 1,60 reais.

e) A farinha custa 0,62 reais e os ovos custam 0,70 reais.

44. (UFF) Leia a afirmação: Todo polígono com mais de 3 lados pode ser decomposto em vários triângulos. O pentágono da figura está decomposto em três triângulos.



Determine o menor número de triângulos em que cada polígono pode ser decomposto.



a) a. 4; b. 2; c. 4; d. 5.

b) a. 2; b. 4; c. 5; d. 4.

c) a. 2; b. 4 ;c. 4; d. 2.

d) a. 3; b. 2; c. 2; d. 4.

e) a. 2; b. 4; c. 5; d. 2.

45. (IBGE) Um quadrado de lado x tem sua altura aumentada em duas unidades e sua base diminuída em duas unidades. A área do retângulo encontrado será:

a) Duas unidades maior se x maior que 8.

b) Duas unidades menor se x maior que 10.

c) Quatro unidades menor.

d) Quatro unidades maior.

e) Cinco unidades menor.

46. (IBGE) Marcos, Thiago e André resolvem viajar a pé da cidade de Penedo até a cidade de João Pessoa. Sabe-se que Marcos, Thiago e André percorrem por dia, respectivamente, 30km, 25km e 18km, e que, pelo cansaço, a viagem foi interrompida quando os três amigos tinham percorrido a mesma distância. Nessas condições, é correto afirmar que:

a) Marcos interrompeu a caminhada no 15º dia.

b) Marcos interrompeu a caminhada no 14º dia.

c) Thiago interrompeu a caminhada no 19º dia.

d) André interrompeu a caminhada no 24º dia.

e) André interrompeu a caminhada no 26º dia.

47. (ENEM) O tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra--cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.

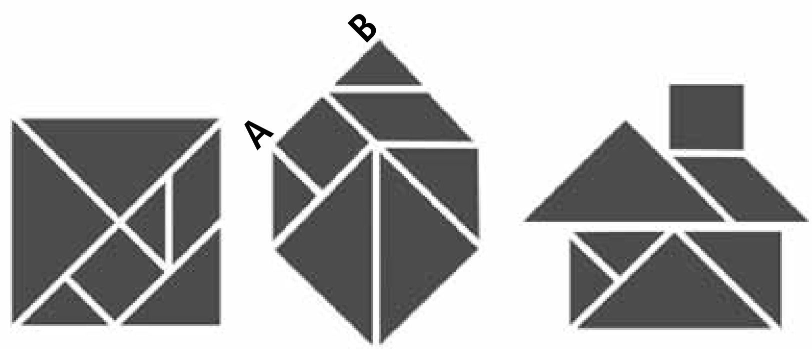


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3**

Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2cm, então a área da figura 3, que representa uma "casinha", é igual a

a) $4cm^2$.

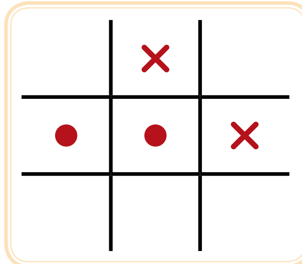
b) $8cm^2$.

c) $12cm^2$.

d) $14cm^2$.

e) $16cm^2$.

48. (ENEM) O jogo-da-velha é um jogo popular, originado na Inglaterra. O nome "velha" surgiu do fato de esse jogo ser praticado, à época em que foi criado, por senhoras idosas que tinham dificuldades de visão e não conseguiam mais bordar. Esse jogo consiste na disputa de dois adversários que, em um tabuleiro 3 × 3, devem conseguir alinhar verticalmente, horizontalmente ou na diagonal, 3 peças de formato idêntico. Cada jogador, após escolher o formato da peça com a qual irá jogar, coloca uma peça por vez, em qualquer casa do tabuleiro, e passa a vez para o adversário. Vence o primeiro que alinhar 3 peças.



No tabuleiro representado ao lado, estão registradas as jogadas de dois adversários em um dado momento. Observe que uma das peças tem formato de círculo e a outra tem a forma de um xis. Considere as regras do jogo-da-velha e o fato de que, neste momento, é a vez do jogador que utiliza os círculos. Para garantir a vitória na sua próxima jogada, esse jogador pode posicionar a peça no tabuleiro de

a) uma só maneira.

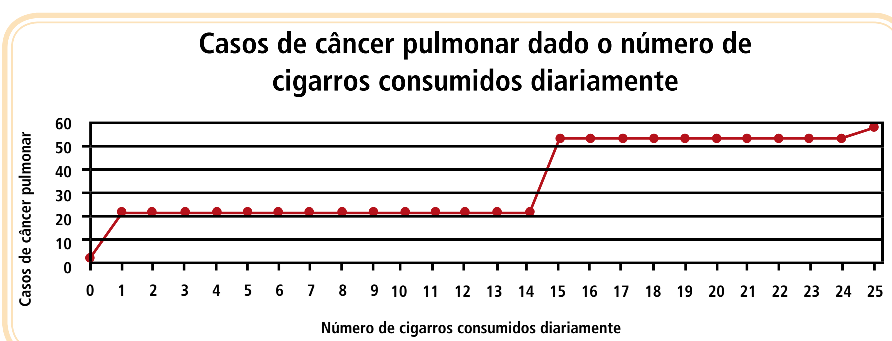
b) duas maneiras distintas.

c) três maneiras distintas.

d) quatro maneiras distintas.

e) cinco maneiras distintas.

49. (ENEM) A suspeita de que haveria uma relação causal entre tabagismo e câncer de pulmão foi levantada pela primeira vez a partir de observações clínicas. Para testar essa possível associação, foram conduzidos inúmeros estudos epidemiológicos. Dentre esses, houve o estudo do número de casos de câncer em relação ao número de cigarros consumidos por dia, cujos resultados são mostrados no gráfico a seguir.



Fonte: Centers for Disease Control and Prevention CDC-EIS Summer Course – 1992 (Adaptado).

a) O consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas inversamente proporcionais.

b) O consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que não se relacionam.

c) O consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas diretamente proporcionais.

d) Uma pessoa não fumante certamente nunca será diagnosticada com câncer de pulmão.

e) O consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que estão relacionadas, mas sem proporcionalidade.

50. (ENEM) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.

A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de

a) Uma combinação e um arranjo, respectivamente.

b) Um arranjo e uma combinação, respectivamente.

c) Um arranjo e uma permutação, respectivamente.

d) Duas combinações.

e) Dois arranjos.

Currículo do professor-autor

Roberto José Medeiros Junior

É Licenciado e Bacharel em Matemática pela Universidade Tuiuti do Paraná (1999), Especialista em Educação Matemática com ênfase em Tecnologias pela Universidade Tuiuti do Paraná (2001), Especialista em Educação à Distância (Tutoria a Distância) – EaD/FACINTER (2007) tem Mestrado em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (2007). Tecnólogo em Gestão pública pelo Instituto Federal do Paraná – IFPR (2010). Entre os anos de 1996 e 2008, atuou como professor de Matemática do Ensino Fundamental ao Médio da rede pública e privada e, desde 2003 vem atuando como professor no Ensino Superior, nos cursos de Licenciatura em Matemática, na modalidade presencial e à distância em instituições públicas e privadas. Entre os anos de 2003 e 2005 atuou como professor de Metodologia, Prática de Ensino e Estágio Supervisionado em Matemática na Universidade Federal do Paraná, nos cursos de Licenciatura em Matemática, Física e Pedagogia. Atualmente é professor de Matemática em regime de Dedicação Exclusiva do Instituto Federal do Paraná na modalidade presencial e a distância. É um dos autores do Livro Didático Público de Matemática para o Ensino Médio do Estado do Paraná e, é também, autor de livros para a formação continuada do Centro Interdisciplinar de Formação Continuada de Professores (CINFOP), da Universidade Federal do Paraná e autor de livros de Matemática Financeira e Estatística para os cursos técnicos do Instituto Federal do Paraná - IFPR.

Anotações