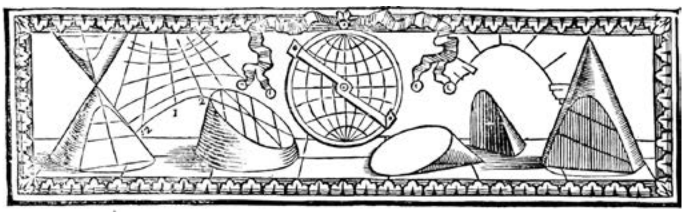
# Tradução Comentada da Obra
# "Novos Elementos das Seções Cônicas"
## (Philippe de La Hire - 1679)
## e sua Relevância para o Ensino de Matemática.

Francisco Quaranta Neto

IFRN Editora

Francisco Quaranta Neto



# Tradução Comentada da Obra “Novos Elementos das Seções Cônicas” (Philippe de La Hire - 1679) e sua Relevância para o Ensino de Matemática.

IFRN Editora

NATAL, 2013

Divisão de Serviços Técnicos.
Catalogação da publicação na fonte.
Biblioteca Mons. Raimundo Gomes Barbosa (MRGB) - IFRN

Tradução comentada da obra "novos elementos das seções cônicas" (Philippe de La Hire – 1679) e sua relevância para o ensino da matemática: preposição XVII de hipérbole / Francisco Quaranta Neto, Luiz Carlos Guimarães. – Natal, 2013.
229 f.

Inclui bibliografia.
ISBN 978-85-8333-011-0

1. Geometria - teoria. 2. Matemática e ensino. 3. Metodologia de ensino. I. Quaranta Neto, Francisco. II. Guimarães, Luiz Carlos. III. Título.

CDU 514

**DIAGRAMAÇÃO E CAPA**
Charles Bamam Medeiros de Souza

**REVISÃO LINGUÍSTICA**
Arlete Alves de Oliveira

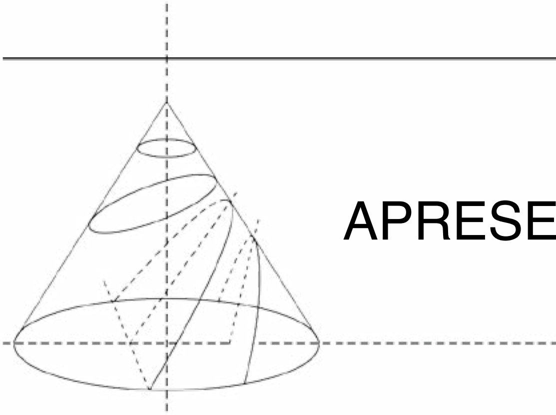
**CONTATOS**
Editora do IFRN
Rua Dr. Nilo Bezerra Ramalho, 1692, Tirol. CEP: 59015-300
Natal-RN. Fone: (84) 4005-0763
Email: editora@ifrn.edu.br

# AGRADECIMENTO

Ao professor Luiz Carlos Guimarães

Embora tenha sido convidado para ser co-autor desse livro, o professor Luiz Carlos Guimarães recusou. Penso que o motivo da recusa está relacionado ao fato do livro ter sido escrito por mim e, consequentemente ter mais digitais minhas que dele. Entretanto, não só a sugestão do tema, como a maior parte das ideias contidas neste livro foram sugeridas por Luiz. Resta-me deixar escrita a enorme admiração que tenho por um professor com uma cultura geral matemática impressionante e com grande capacidade de realização de projetos. Temos um fascínio pela nobre ferramenta dos gregos: a geometria. Temos, ainda em comum, o desejo da busca de uma pesquisa original e com bases sólidas.

Obrigado por me apresentar um autor tão fascinante como Philippe de La Hire! Só me resta lutar por parcerias em outros projetos para que frutos como esse possam nascer em novos campos.



# APRESENTAÇÃO

As pesquisas em história da matemática têm aumentado muito no Brasil e cresce o número de jovens pesquisadores que obtêm graus de mestre ou doutor com pesquisas nessa área. Uma ferramenta essencial para essas pesquisas é a leitura de fontes originais. Da mesma maneira que, em literatura, é necessário ler um autor para realmente conhecê-lo, em matemática é importante termos contacto direto com obras relevantes do passado, para vermos como a matemática era praticada e transmitida ao longo de seu desenvolvimento.

No Brasil, infelizmente, são poucas as traduções de obras clássicas de matemática, o que prejudica o conhecimento da história da matemática, mormente por alunos de cursos de graduação, bacharelado ou licenciatura.

Assim, é bem vinda a excelente contribuição à área prestada por Francisco Quaranta Neto e Luiz Carlos Guimarães, com a tradução do *Novos Elementos das Seções C*ônicas, de Philippe de La Hire. Os autores merecem parabéns pela seriedade e qualidade de seu trabalho. Sua tradução comentada impressiona pelo cuidado com que o texto de La Hire foi trabalhado e compreendido.

Philippe de La Hire (1640 – 1718) não foi um dos gigantes da matemática, como Arquimedes, Newton e Gauss, mas fez parte de uma comunidade nascente, no século XVII, a dos matemáticos. Embora não tenha sido um dos matemáticos mais destacados de sua geração, ele fez contribuições importantes em geometria, campo em que seu grande interesse eram as cônicas. Ele foi influenciado pelas ideias de Desargues e de Descartes e lhe devemos uma abordagem planimétrica das cônicas, ou seja, considerando-as como curvas no plano e trabalhando exclusivamente neste plano e aplicou em seu estudo a geometria analítica concebida por Descartes.

O capítulo 2 da tradução, por si só, recomenda a leitura de todo o livro.

Nesse capítulo, encontra-se excelente introdução à história das cônicas, que visa contextualizar a contribuição de La Hire sobre o assunto. No capítulo 4, temos a tradução integral do texto de La Hire.

As contribuições originais dos autores da tradução principiam com o capítulo 5, em que comentam, cuidadosamente, as traduções existentes do texto de La Hire, comparando-as. Em seguida, começa seu trabalho de análise e descrição do livro de La Hire. A meu ver, trata-se do ponto máximo desta tradução, e mostra completa familiaridade e sintonia com o texto de La Hire.

O capítulo 6 mostra os tradutores completamente familiarizados com a matemática das cônicas, como feita no século XVII. Eles dissecam cuidadosamente a matemática do texto, analisando as proposições apresentadas por La Hire. E mais, no capítulo 7, acrescentam vários resultados que poderiam (e deveriam) constar do livro de La Hire, mostrando, mais uma vez, competência matemática no assunto.

A fim de provar que La Hire realmente influenciou as gerações futuras, no capítulo 8, Quaranta e Guimarães comparam cuidadosamente o livro de La Hire com um dos textos modernos sobre as cônicas, o conhecido tratado de geometria da coleção F.I.C..

Ao leitor que se perguntar por que ler o livro, recomendo ir direto ao capítulo 9, intitulado "*Por que conhecer La Hire*?". Após lê-lo, tenho certeza de que não hesitará em desfrutar do prazer de conhecer uma obra viva e relevante e que desempenhou um papel importante para a visão que temos hoje das cônicas e de seu ensino.

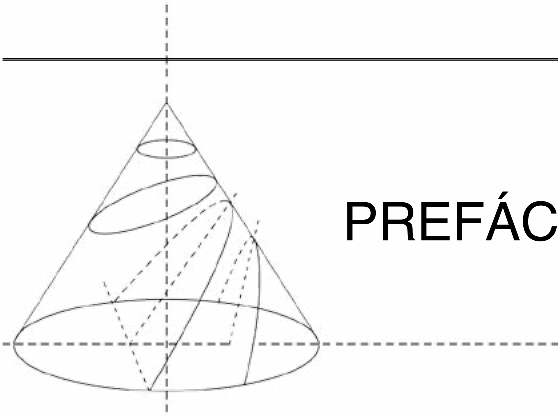
Quaranta apresenta quatro apêndices em que tabula, para auxiliar o leitor, resumos e enunciados de proposições, tanto do texto do La Hire quanto do F.I.C. e, finalmente, uma relação das obras de La Hire.

A leitura desse livro exigirá lápis, papel e esforço, mas valerá a pena.

João Bosco Pitombeira de Carvalho

Vassouras, RJ, 2013.

# SUMÁRIO



# PREFÁCIO

Quando cursava o mestrado em ensino de matemática na UFRJ em 2007, fui apresentado, pelo meu orientador Luiz Carlos Guimarães, a um texto de Philippe de La Hire. Nunca tinha ouvido falar desse matemático francês que nasceu em 1640, pouco depois da obra de Descartes (Discurso sobre o Método) que lançou as sementes da geometria analítica em um dos seus apêndices (1637). Apesar de uma produção intelectual intensa com contribuições que alcançaram os nossos dias, La Hire é um ilustre descohecido de expressiva parcela dos matemáticos brasileiros.

Atualmente é usual no ensino das três curvas cônicas (elipse, parábola e hipérbole) a apresentação inicial dada através de uma equação e seu gráfico associado. Quando comecei a ler "Novos Elementos das Seções Cônicas" (Philippe de La Hire - 1679) percebi que a abordagem era completamente diferente. La Hire apresenta 61 teoremas sobre as três cônicas a partir de uma definição bifocal (na parábola, um dos focos está no infinito). O que mais me chamou a atenção foi o fato de não usar em momento algum qualquer tipo de equação, ou seja, não utilizar a geometria analítica. Ele utiliza exclusivamente a chamada “Geometria Sintética”, ou seja, a geometria clássica grega contemplada no conhecido livro de Euclides: “Os Elementos”.

A abordagem das cônicas sem o uso de equações era, entretanto, o padrão da época uma vez que o uso da geometria analítica ainda não estava popularizado, pois acabava de surgir. La Hire estava justamente entrando para a história ao fazer um livro de cônicas usando a gemetria euclideana usual da época (sintética) para então utilizá-lo como base para escrever os dois livros seguintes usando a abordagem inovadora do momento: a geometria analítica. Ele publicou esses três livros juntos em 1679 como se fossem um único livro. Um dos seus méritos nesses três livros de 1679 foi justamente fazer a comunicação entre as geometrias analítica e sintética. Vale destacar que apenas o primeiro dos três livros de La Hire de 1679 foi traduzido para o português na presente obra.

La Hire usou as cônicas para fazer geometria analítica! O autor Carl Boyer cita La Hire no seu livro de história da matemática de 1979, mas dá muito mais destaque a ele no livro de 1956 sobre a história da geometria analítica. Dedica mais de 15 páginas a La Hire, citando, por exemplo, que o termo atual "origem" do plano cartesiano foi por ele sugerido no 2º desses três livros e que ele foi o primeiro a apresentar a equação de uma quádrica. Boyer, inclusive, comete um erro ao identificar a quádrica (ver Carl Boyer no capítulo 2).

A sua contribuição para a história da geometria analítica já seria suficiente para justificar a sua tradução e o seu maior conhecimento por parte da comunidade acadêmica. Existiu, ainda, outro motivo que aumentou o desejo de traduzir La Hire. O capítulo 2 desse livro apresenta um breve resumo da história das cônicas. Considerando as obras históricas que tivemos acesso e também as referências a elas feitas, pudemos constatar que este primeiro livro da obra de La Hire pode ser relevante também para a história das cônicas.

Antes dele, qualquer abordagem sobre cônicas tinha como ponto de partida o cone. A definição das três curvas era dada a partir da seção de um cone por um plano. A abordagem espacial era a regra. As perpectivas da época, porém, não tinham fácil compreensão. Isso tornava qualquer obra sobre cônicas acessível apenas àqueles que possuíam uma boa visão espacial.

O próprio Philippe de La Hire foi vítima dessa dificuldade. Seis anos antes, em 1673, ele fez um livro sobre cônicas utizando um contexto espacial. Ele usava a divisão harmônica para provar resultados verificados nas seções do cone. No prefácio do livro de 1679, ele comenta que este livro de 1673 foi mal recebido pelos matemáticos, pois muitos sequer o compreendiam.

Como resposta, ele escreveu esta obra em 1679, tendo como um dos objetivos ser compreendido por mais pessoas da área. Nela, a abordagem inicial é bifocal e feita exclusivamente no plano, tratando as três curvas de forma separada. Ele escreve uma obra que não precisa mais das três dimensões do espaço. Vale ressaltar que a propriedade bifocal que ele utilizou como definição já era conhecida desde Apolônio. O seu mérito está no fato de utilizar a propriedade bifocal para definir as cônicas. Esse fato sim, conjecturamos ser inovador: transformar a propriedade bifocal em caracterização das cônicas.

Sintetizando, La Hire usou uma definição plana para as cônicas que as desvinculam do espaço. Essa abordagem certamente chegou aos nossos dias no ensino das cônicas. Esse é, a nosso ver, a outra provável contribuição dessa obra de La Hire.

Um detalhe importante deste livro, a ser ressaltado, é que durante a confecção da dissertação de mestrado que o originou, quatro traduções do primeiro livro de La Hire de 1679 foram produzidas por mim (ver capítulo 5 no item 5.2). No texto da dissertação, colocamos a 4ª versão que foi feita do original em francês e sem nenhuma adaptação à linguagem matemática atual. Já neste livro, colocamos a 3ª versão que também foi feita a partir do original em francês, mas com intencional adaptação à linguagem matemática atual. O motivo dessa escolha foi facilitar a compreensão do texto por parte do leitor. Enfim, a nossa escolha deixou de lado um dos preceitos da história da matemática: a preservação da linguagem da época. A intenção foi permitir uma melhor compreensão por um número maior de leitores.

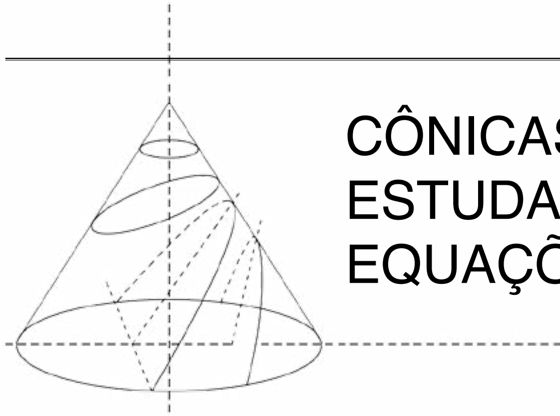
A principal diferença entre este livro e a dissertação que o originou está na diminuição do tamanho do capítulo 8 que compara este texto de La Hire de 1679 com um livro didático do século XX muito usado para o ensino de cônicas: “Elementos de geometria” do FIC. O motivo da retirada é que o leitor poderia ter alguma dificuldade para compreender este outro livro, uma vez que foram apresentadas as suas proposições sem as suas demonstrações. As outras alterações foram as seguintes: retirada de dois apêndices que mostravam figuras originais e o texto da biografia em francês.

Vale também destacar que um elemento que esteve presente em toda essa pesquisa foi o uso da geometria dinâmica. Todas as proposições presentes na obra de La Hire tiveram suas respectivas construções geométricas realizadas no software Tabulae desenvolvido pela UFRJ. Foi essencial para meu próprio convencimento da validade de cada proposição, assim como foi importante para apresentar desenhos de cônicas de melhor qualidade ao leitor.

A confecção deste livro tem o claro objetivo de oferecer um texto não usual sobre cônicas aos professores de matemática dos mais diversos níveis, aos alunos mais interessados no assunto, aos curiosos de qualquer ordem. Esse texto pode dar idéias de novas ferramentas de abordagem das cônicas para o professor. Por exemplo, quando ele ensinar a função do 2º grau, pode justificar a origem da sua equação utilizando exclusivamente o Teorema de Pitágoras, como fez La Hire. No último capítulo desse livro, outras sugestões didáticas são dadas.

La Hire merece maior atenção por parte dos historiadores de matemática. Esta convicção me impulsiona a dar continuidade à tradução do 2º e 3º livros da obra de 1679. Resta-me o seguinte desejo: desfrutem do mesmo fascínio que vivenciei ao ler o 1º livro da obra de La Hire de 1679!

CAPÍTLO 1



# CÔNICAS PODEM SER ESTUDADAS SEM EQUAÇÕES?

A que objetos matemáticos as pessoas normalmente associam as palavras "cônicas", "elipse", "parábola" e "hipérbole"?

É provável que a maioria responda muito pouco sobre elas ou simplesmente nada. Para as pessoas que escolheram alguma profissão que necessita de um maior suporte da matemática, aumenta a chance de alguma lembrança. Possivelmente, aparecerão menções ao fato de serem curvas[1] e também à existência de uma fórmula associada à cada uma delas.

Conforme mostra o Programa de Acesso à Escola de Engenharia (antiga Escola Polytechnica) da UFRJ de 1907 [13], este assunto já mereceu maior destaque e profundidade no ensino. Eram cobradas as construções contínuas e por pontos, a existência dos eixos de simetria, o conceito de excentricidade, vários traçados de retas tangentes às curvas, projeções sobre os eixos, áreas, etc. Não somente as curvas cônicas eram exploradas, como também várias outras (cissóide, espiral, ciclóide, epiciclóide, hélice). Atualmente, o ensino de matemática no Brasil não dedica grande atenção ao tema. Vamos fazer, a seguir, um breve relato do que é usualmente ensinado no nosso país sobre esse assunto nos dias atuais.

No ensino fundamental, apenas a parábola faz parte do programa. É ensinada na última série sob a forma de "Função Quadrática" ou "Função

---

Obs. 1 – Usaremos os termos "cônicas", "seções cônicas" ou "curvas cônicas" para fazer referência nesse texto às seguintes curvas: elipse, parábola e hipérbole do 2º Grau". A sua fórmula algébrica é apresentada juntamente com a sua representação gráfica. Serve como um exemplo de função, mas a sua ligação com o universo das cônicas costuma ser ignorada pela maioria durante a sua apresentação. O objetivo se restringe à introdução do conceito de função.

Na primeira série do ensino médio, a parábola volta a ser objeto de estudo dentro de um contexto mais amplo e aprofundado do estudo das funções. Novamente, o vínculo com as cônicas é deixado de lado pela maioria dos professores. As habilidades na manipulação das equações analíticas e o entendimento dos papéis de cada parâmetro costumam ser o foco desse momento.

Na terceira e última série do ensino médio, finalmente as cônicas aparecem no programa escolar. Mas vale frisar que, por uma série de motivos, esse tópico sequer chega a ser ensinado por boa parte dos professores. Quando acontece, se restringe normalmente a um curto período (uma a duas semanas) e o enfoque se concentra nas equações analíticas cujas demonstrações costumam se basear na caracterização bifocal. As formas das equações mais usadas são:

- para a elipse, $\frac{x}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
- para a hipérbole, $\frac{x}{a^2}$ - $\frac{y^2}{b^2} = 1$;
- para a parábola, $y = \frac{x^2}{4p}$.

Uma minoria estende a idéia e trabalha com um sistema de coordenadas retangulares cuja origem não esteja no vértice da cônica e foi alterada através uma translação ou também explora a idéia de troca de posição dos eixos X e Y entre si. Elas são representadas no plano cartesiano e assim surgem as formas geométricas das curvas. Os parâmetros ***a, b*** e ***c*** são apresentados para a elipse e para a hipérbole. Para a parábola, surge o parâmetro ***p***, mas normalmente nenhuma ligação com o estudo anterior de funções quadráticas é feita. A seguir, vêm os exercícios que costumam se resumir a uma manipulação algébrica das suas equações. O mais grave é que nenhuma ligação entre as três curvas é feita. Parece que elas surgem de "planetas" diferentes. As propriedades decorrentes da existência de assíntotas na hipérbole é pouco desenvolvida (a elipse e a parábola não possuem). É possível que muitos alunos cheguem a terminar o ano letivo desconfiando que a hipérbole seja uma parábola que foi duplicada e refletida.

No ensino superior, volta a ser estudada em cursos da área tecnológica. Usualmente, nas cadeiras de cálculo, geometria analítica e álgebra linear.

As cônicas aparecem na cadeira de cálculo como uma ferramenta para a construção geométrica das superfícies no espaço originadas pelas funções reais de duas variáveis reais. Na geometria analítica, o enfoque reside puramente nas equações analíticas. Já na álgebra linear, é feita uma conexão entre as equações com vetores e matrizes e, a partir dos determinantes destas matrizes, é deduzida qual é o tipo da cônica e a sua localização no plano cartesiano, permitindo entender, por exemplo, a rotação dos eixos X e Y**.**

O conhecimento acumulado ao longo da história das seções cônicas é, porém, muito mais amplo que isso. Diversos autores apresentaram muitas outras caracterizações para tais curvas ao longo de, pelo menos, 24 séculos de história. Ou seja, existem várias outras formas das cônicas serem definidas e apresentadas. As primeiras caracterizações vieram da Grécia Antiga e se serviam de um cone como elemento de partida. Muitas outras surgiram: a que utiliza o foco e diretriz, a caracterização bifocal, a que usa as equações analíticas, a que faz uso de ângulos como parâmetros, as construções mecânicas, a que utiliza matrizes e determinantes (álgebra linear), etc. Se existem várias formas de se apresentar as cônicas, por que **apenas** a caracterização feita através das equações dessas curvas e originada da caracterização bifocal prevaleceu para o ensino do início deste nosso século XXI?

## O TEXTO DE LA HIRE E SUAS POTENCIALIDADES

Este livro foi produzido a partir de uma dissertação de mestrado. Oferecer um texto não usual sobre as cônicas pode ser considerado o foco desse livro.

Os livros didáticos direcionados para o ensino de cônicas possuem uma extrema concentração na caracterização dessas curvas através das equações. Ou seja, para a maior parte das pessoas, falar em cônicas é o mesmo que falar nas equações das cônicas. Há uma excessiva concentração nessa caracterização, quando sabemos que existem várias outras. Por exemplo, existe outra caracterização que utiliza um ponto (foco) e uma reta (diretriz). Esta idéia de usar um ponto e uma reta para caracterizar as cônicas surgiu ainda na Grécia Antiga (ver Euclides e Aristée no capítulo 2), mas a linguagem geométrica sintética usual naquela época foi abandonada. É muito difícil encontrar um texto voltado para o ensino atual de cônicas que explore essas curvas por meio da geometria euclidiana sintética. Vale destacar que a geometria euclidiana faz parte do conteúdo do programa do ensino fundamental. Ou seja, acredita-se que esta forma de apresentar a geometria apresenta vantagens didáticas. Por que o estudo atual das cônicas se restringe a uma única linguagem geométrica? Por que outras caracterizações não estão presentes nos livros didáticos?

Este livro aborda a obra do Matemático francês **Philippe de La Hire** de **1679: "*Novos Elementos das Seções Cônicas*".** A partir da caracterização bifocal, ele apresenta diversas propriedades sobre as três curvas, utilizando exclusivamente a geometria euclidiana sintética (a ferramenta dos gregos) nas suas demonstrações. Sem nenhuma influência da linguagem analítica como conhecemos hoje!

Philippe de La Hire escreveu três obras sobre cônicas nos anos de 1673, 1679 e 1685. A primeira obra apresenta conteúdo original, apresentando idéias novas sobre o conhecimento das cônicas da época. Oferece dois métodos para o estudo dessas curvas: o primeiro no espaço utilizando geometria projetiva e o segundo no plano. Ela, porém, não teve fácil compreensão, recebendo muitas críticas. La Hire sentiu a necessidade de escrever uma nova obra que tivesse maior simplicidade e fosse de mais fácil compreensão e visualização. Então escreveu a segunda obra, "*Novos Elementos das Seções Cônicas*", apresenta 61 proposições sobre a parábola, elipse e hipérbole. Provavelmente todas elas já eram conhecidas. A novidade da obra está na abordagem isolada de cada curva no plano, totalmente desvinculada do cone. Ao desvincular do espaço, não podia mais definir as cônicas a partir das seções feitas no cone. Escolheu a propriedade relativa às distâncias dos pontos das curvas aos focos (caracterização bifocal). Ele achava que isso facilitava o entendimento das curvas e permitia obter rapidamente um razoável conjunto de propriedades das curvas. Ele não foi o primeiro a fazer tal caracterização, conforme cita Bongiovanni [1] ao relatar a obra dos irmãos árabes Muhammad, Ahmad e Hasan, conhecidos como Banu Musa. Mas foi, dentre a bibliografia a que tivemos acesso, o primeiro autor a fazer um tratado com um grande número de proposições demonstradas a partir desta caracterização bifocal.

Essa forma bifocal de definir as cônicas acabou chegando aos nossos dias, assim como o estudo isolado de cada uma delas no plano, exatamente como fez La Hire na referida obra. O Matemático francês Henri Lebesgue em sua obra "Lês Coniques" [13] faz uma crítica dizendo que essa abordagem compromete a unificação entre elas. Ele cita Philippe de La Hire como o responsável por essa abordagem bifocal. Boa ou ruim, o fato é que essa abordagem teve mais fácil compreensão para os iniciantes, conforme cita Coolidge [5]. Ela acabou alcançando o ensino nos dias atuais.

Este livro parte da convicção que a obra de La Hire de 1679 possui potencialidades para a formação do professor e para o ensino.

Listaremos a seguir, alguns objetivos mais específicos desse livro.

- Apresentar a tradução para o português de um texto didático e abrangente sobre as curvas cônicas (capítulo 4). (a **primeira** tradução dessa obra para o português!)

- Oferecer alternativas ao professor. Além de melhorar a sua formação, este texto pode ampliar as visões do ensino por ele ministrado.
- Ampliar e complementar o texto com as novas proposições (capítulo **7**).
- Fazer a comparação do referido texto com um texto relevante para o ensino de cônicas no século XX em nosso país (capítulo 8).

## DESCRIÇÃO DESTE LIVRO

No capítulo **2**, é feito um resumo da história das cônicas. Ele tem maior destaque para o período que vai desde o surgimento das curvas na Grécia Antiga até o século XVII, uma vez que La Hire escreve as suas três obras sobre as cônicas nas três últimas décadas deste século. A caracterização bifocal tem participação privilegiada durante o capítulo.

No capítulo **3**, é apresentada uma biografia de Philippe de La Hire. Ela é uma tradução de uma parte de um livro editado em 1699, cujo autor é Bernard de Fontenelle. Ele era secretário da Academia Real de Ciências da França. Fez, então, um livro com biografias dos membros dessa academia, da qual fazia parte Philippe de La Hire.

No capítulo **4**, é feita a tradução para o português do livro ***"Novos Elementos das Seções Cônicas"***. Não temos qualquer notícia a respeito de uma versão desta obra para a nossa língua. Como fonte para essa tradução para o português, utilizamos inicialmente uma outra tradução feita para o inglês por Brian Robinson em 1723. Em seguida, conseguimos o original em francês completo com as suas três partes (as outras duas não têm as cônicas como centro das atenções). Esse processo de tradução gerou 4 versões, cada uma com características próprias. O texto final em português ficou com 60 páginas e foi feito a partir do original em francês com manutenção fiel da linguagem usada na época por La Hire.

O capítulo **5** foi dedicado aos comentários sobre as traduções (para o português e para o inglês). Proposição a proposição, foram comentados detalhes das traduções, com destaque para a feita para o português. Como a tradução de 1723 para o inglês serviu de fonte inicial para a nossa dissertação, tornaram-se pertinentes comentários também sobre essa tradução para o inglês.

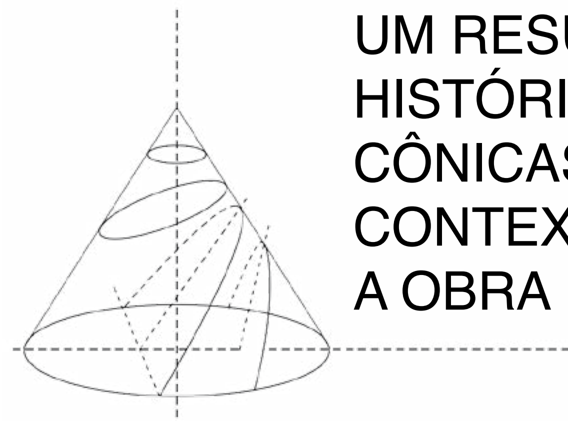
O objetivo do capítulo **6** foi descrever a obra. Proposição a proposição, são comentados detalhes no texto que merecem atenção. Aspectos relevantes que merecem comparações com a abordagem atual das cônicas. Aspectos que merecem críticas no texto. No final, é feita uma conclusão que destaca as características gerais da obra.

Já no **sétimo** capítulo, são apresentadas 8 novas proposições que não fazem parte do texto de La Hire. Percebemos que a grande maioria das 61 proposições presentes na obra original possui equivalência entre as três curvas cônicas. Foi elaborada uma tabela de equivalências e a partir das lacunas existentes nessa tabela foram "criadas" as novas proposições com argumentação idêntica à usada por La Hire em 7 das 8 novas proposições.

No capítulo **8,** a fim de explorar a sua possível relevância para o ensino das curvas cônicas, foi feita uma comparação da obra "*Novos Elementos das Seções Cônicas*" com um livro de grande uso didático, conhecido como F. I. C.. Este livro teve um papel marcante no ensino da geometria no Brasil e em outros países e parece ter funcionado como referência para o programa do concurso de acesso à Escola de Engenharia (atualmente vinculada à UFRJ) durante uma boa parte do século XX.

O capítulo **9** conclui e resume todo o trabalho de pesquisa desenvolvido.

CAPÍTULO 2



# UM RESUMO DA HISTÓRIA DAS CÔNICAS PARA CONTEXTUALIZAR A OBRA

## 2.1 - FONTES DE PESQUISA

A fim de analisar a importância de uma obra ou de um autor para a história de uma ciência, torna-se necessária a realização de um breve relato sobre o desenvolvimento dessa ciência ou, pelo menos, de parte dela. O que foi feito por outros autores antes dessa obra, o contexto em que ela se inseriu e como essa obra foi avaliada e utilizada pelos expoentes que o sucederam dessa área de conhecimento são questões cruciais que precisamos responder minimamente.

No nosso caso, objetivamos avaliar a importância da obra ***"Novos Elementos das Seções Cônicas"*** **(Philippe de La Hire – 1679)** para a história do ensino de matemática. Precisamos, portanto, fornecer um conjunto mínimo de informações que contribua para a compreensão da evolução do assunto "Seções Cônicas". Os passos relevantes do seu processo histórico ou, pelo menos, da parte que se relaciona com o referido texto, merece ser alvo de uma exposição. Tal exposição pode ajudar na obtenção de respostas preliminares para perguntas relevantes do tipo: como surgiram as seções cônicas? Que problemas tentavam resolver? Por que passaram a fazer parte do ensino da matemática? Qual das abordagens apresentadas prevaleceu no ensino dos dias atuais?

A leitura dos textos mais citados e usados como referência no assunto pelos autores matemáticos a que tivemos acesso é indispensável para uma descrição fiel do processo evolutivo das curvas denominadas cônicas. Essa tarefa, porém, é de difícil execução, quase inexeqüível. Seja pela quantidade de obras consideradas cruciais nesse processo, ou pelo fato de exigir a fluência em diversas línguas diferentes ou pela dificuldade de compreender textos escritos em outras épocas que faziam uso de um conjunto de ferramentas diferente do atual, isto é, outro aparato simbólico.

Contentar-nos-emos com uma síntese da história das cônicas de menor qualidade. Serão utilizadas, por nós, as opiniões dos comentadores da história dessas curvas. Selecionamos alguns autores que relataram a história dessas 3 curvas: Michel Chasles e seu livro *"Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie"* (1837), Vincenzo Bongiovanni e sua tese de Doutorado *"Les caractérisations des coniques avec Cabri-géomètre em formation continue d'enseignants: étude d'une sequence d'activités et conception d'un hyperdocument interactif"* (2001) e Julian Lowell Coolidge e sua obra *"History of the Conic Sections and Quadric Surfaces"* (1945).

As obras completas que consultamos para esse resumo foram as três de Philippe de La Hire sobre cônicas. As duas primeiras são originais em francês. A primeira, de 1673, *"Nouvelle methode en geometrie pour les sections des coniques et cylindriques"*. A segunda, de 1679, possui três partes: *"Nouveaux elemens des sections coniques"*, *"Les lieux geometriques"* e *"La construction, ou la effection das equations"*. A terceira foi a tradução da obra *"Sectiones conicae in novem libros distributae"* para o francês feita em 1995 por Jean Peyroux (originalmente feita em Latim em 1685).

## 2.2 – UM RESUMO DA HISTÓRIA DAS CURVAS CÔNICAS

Neste resumo sobre a história destas três curvas, serão priorizados os tópicos e os autores que se relacionam mais diretamente com a obra de Philippe de La Hire, alvo dessa dissertação. Consequentemente, muitos autores e obras relevantes para a história dessas curvas serão citados superficialmente, ou omitidos, por não se relacionarem diretamente com o nosso objeto de estudo. Imaginamos que essa omissão não impeça nem comprometa alcançar os objetivos da presente dissertação.

Serão comentados, a seguir, mais de **30** autores cujas obras apresentaram alguma relevância para o desenvolvimento do conhecimento sobre as seções cônicas.

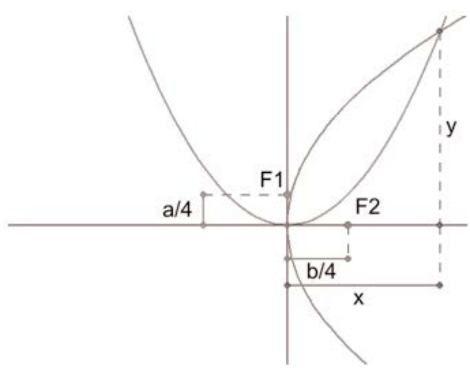
## 2.2.1 – O PERÍODO GREGO

O surgimento e as primeiras obras relevantes sobre as curvas cônicas ocorreram na civilização que foi o berço da matemática como ciência: a Grécia Antiga. Ela abrange a região que inclui o país que hoje chamamos de Grécia e diversos países adjacentes como Itália, Egito, Turquia, etc. Falavam, principalmente, o grego e foram a principal fonte de textos matemáticos importantes durante um período que vai do século VII a.C. até o século VI d.C.

### MENECHME

Segundo Coolidge [**5**] e Bongiovanni [1], o primeiro autor que fala sobre as curvas cônicas é Menechme. Durante o quarto século antes de Cristo, surgiram alguns problemas que tiveram grande importância para os gregos, uma vez que a sua solução através da régua e do compasso (a ferramenta usual grega) não era obtida: a trisseção de um ângulo, a quadratura do círculo e a duplicação do cubo. Várias soluções foram propostas pelos gregos para tais problemas ao longo de vários séculos. A duplicação do Cubo teve uma solução proposta por Menechme. Ele partiu de duas proporções denominadas “dois meios proporcionais” anteriormente apresentadas por Hipócrates e sugeriu a construção de curvas até então desconhecidas. A solução do problema seria a interseção entre duas parábolas ou também entre uma parábola e uma hipérbole.

Em linguagem moderna, $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Fazendo ***b = 2a*** e resolvendo o sistema de equações, a medida ***x*** será a solução do problema da duplicação do volume de um cubo de lado *a*. Fazendo o gráfico das equações $y = \frac{x^2}{a}$ e $x = \frac{y^2}{b}$, sendo F1 e F2 os focos das parábolas, tem-se (ver figura abaixo):




O novo lado do cubo cujo volume foi duplicado é dado pala medida de **x.**

Bongiovanni afirma na página 30 de [1]:

> *"Dans la recherche d'une courbe satisfaisant la condition $y^2 = px$, expression écrite en langage moderne, Ménechme introduit la parabole. Cette nouvelle courbe, obtenue comme section d'un cône circulaire droit par un plan perpendiculaire à une génératrice, fut appelée à cette époque 'section du cône droit rectangle' ou 'orthotome' et plus tard nommée 'parabole' ".*

Traduzindo o parágrafo anterior:

> *"Durante a procura de uma curva que satisfizesse a condição $y^2 = px$, expressão escrita em linguagem moderna, Ménechme introduziu a parábola. Esta nova curva, obtida como uma seção do cone circular reto por uma plano perpendicular a uma geratriz, foi denominada na época 'seção retangular de um cone circular reto' ou 'orthotome' e mais tarde foi denominada 'parábola'.*

Menechme introduziu a curva que hoje chamamos "*Parábola"* e, possivelmente, fez a associação com uma seção do cone circular reto formada por um plano paralelo à geratriz e a denominou "Seção de um cone reto retângulo" ou "Orthotome". Bongiovanni cita, nas páginas 29 e 32 de [1], os autores que atribuem esse pioneirismo a Menechme: Eratóstenes (276 a.C.), Próclus (400d. C.) e Eutocius (500 d.C.). Diz ainda que embora não haja qualquer texto que mostre seu conhecimento também da elipse, Eratóstenes se refere às três curvas como "Tríade Menechmiana".

## EUCLIDES E ARISTAEUS

Pappus (final do século IV depois de Cristo), no livro VII da sua coleção, atribui a Euclides (285 a.C.), na obra *"Lugar Geométrico na Superfície"*, quatro lemas (235 a 238) que caracterizam as três cônicas através de um ponto (foco) e de uma reta (diretriz), de acordo com Michel Chasles (pág. 43 de [4]). Em linguagem moderna, quando uma curva possui um ponto genérico cuja razão entre as distâncias deste ponto até um outro ponto dado e uma reta dada é igual a um, então esta curva é uma parábola. Quando menor que um, é uma elipse. Quando maior que um, é uma hipérbole. Tal caracterização pode ter surgido na obra de Aristaeus (350 a.C.). Estas duas obras estão perdidas.

## ARQUIMEDES

Com Arquimedes (287 – 212 a.C.), surge uma caracterização que define as três curvas como seções de um cone. Bongiovanni afirma na página 38 de [1]:

> *"Archimède (287 avant J.-C. conçoit aussi les coniques comme intersections de cônes de révolution, d'angles d'ouvertures différents, par des plans perpendiculaires à une génératrice.*

> *Par cône acutangle, il entend un cône circulaire droit dont les côtés qui sont les intersections de sa surface et du plan conduit par l'axe, forment un angle aigu. Si ces intersections forment un angle droit, le cône s'appelle rectangle, et si elles forment un angle obtus, le cône s'appelle obtusangle".*
>
> Traduzindo o parágrafo acima:
>
> *"Archimedes (287 a.C.) também conhecia as cônicas como interseções do cone de revolução, com ângulos de abertura diferentes, pelos planos perpendiculares a uma geratriz.*
>
> *Por cone acutângulo, ele entedia um cone circular reto onde os lados que são as interseções de sua superfície e do plano conduzido pelo eixo, formam um ângulo agudo. Se estas interseções formam um ângulo reto, o cone é chamado retângulo e se eles formam um ângulo obtuso, o cone é chamado obtusângulo".*

Segundo a citação acima, Arquimedes faz a seguinte classificação para cones retos ou de revolução: *retângulo* quando o ângulo formado entre as geratrizes que pertencem a um dado plano é reto; *obtusângulo* quando este ângulo é obtuso e *acutângulo* quando é agudo. Surge o termo "Orthotome" (parábola) para a seção cônica obtida quando o plano de corte é perpendicular a uma geratriz de um cone retângulo. "Oxythome" (elipse), quando esta seção é feita no cone acutângulo. "Amblytome" (hipérbole), quando feita no cone obtusângulo (Coolidge confirma parte dessa denominação). Bongiovanni atribuiu essa classificação de cônicas à obra de Aristeu e Euclides. Designava o *eixo* da parábola por "diâmetro", os *diâmetros* por "linhas paralelas ao diâmetro" e o *parâmetro* por "linha que se estende até o eixo". Ele afirma na página 40 de [1] que Arquimedes apresentou, como propriedade fundamental para a parábola, a razão constante entre o quadrado da ordenada e a abscissa (pedaço do eixo que vai do pé da ordenada até o vértice). Para a elipse, a razão constante entre o quadrado da ordenada e o produto dos pedaços do eixo originados pela interseção com a ordenada (página 40 de [1]). Para a hipérbole, a razão constante entre o quadrado da ordenada e o produto das distâncias entre os vértices e a interseção com a ordenada (página 41 de [1])

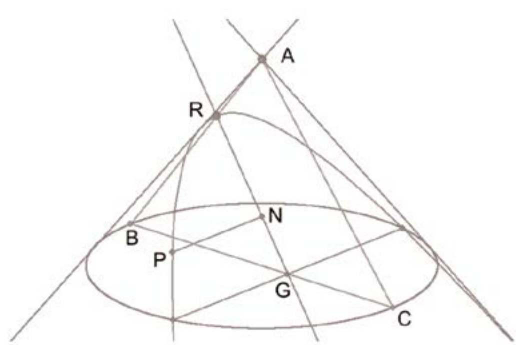
## APOLÔNIO

Os três comentadores consultados apontam Apolônio (262 ou 245? – 190 a.C.) como o autor que mais contribuiu para a expansão do conhecimento das cônicas. Sua obra sobre essas curvas é composta por oito livros. Os 4 primeiros apresentam principalmente resultados já conhecidos, enquanto os quatro últimos mostram, na sua maior parte, a originalidade e a genialidade desse "Grande Geômetra" (termo usado por Coolidge). Segundo Michel Chasles (página 17 de

[4]) e Bongiovanni (página 42 de [1]), Apolônio é o primeiro a apresentar uma caracterização unificadora ao afirmar que as conhecidas seções cônicas podem ser obtidas a partir de um mesmo cone oblíquo de base circular. Até então, os cones eram retos e distintos para cada cônica. O cone passa a ser composto por duas partes iguais e simétricas ao vértice. Assim surge o segundo ramo da hipérbole. Para se obter a parábola, deve-se cortar este cone por um plano paralelo a uma de suas geratrizes AB ou AC (ver figura abaixo). Para a elipse, o plano de corte intercepta os dois lados AB e AC do triângulo ABC (que ele chama de "Triângulo pelo Eixo") e este contém o Eixo (linha reta que une o vértice do cone ao centro do círculo). Para a hipérbole, o plano de corte intercepta apenas um dos lados (AB ou AC) do triângulo ABC, sem ser paralelo ao outro lado.

Ele apresenta uma propriedade fundamental e válida para as três cônicas que iguala o quadrado cujo lado é a ordenada NP (segmento perpendicular ao eixo da cônica que une um ponto da cônica ao eixo) a um retângulo onde um dos lados é a parte do eixo que vai do vértice até a ordenada e o outro é um segmento que se relaciona com o que chama "Lactus Eretum" (Chasles diz ainda que os autores modernos usaram os termos "Lactus Retum" e Parâmetro). Bongiovanni afirma que Apolônio é pioneiro também ao usar pela primeira vez os termos "parábola", "hipérbole" e "elipse" para designar as seções cônicas (páginas 51, 54 e 57, respectivamente de [1]). Na parábola, o quadrado da ordenada NP é igual ao retângulo cujos lados são o segmento (abscissa) NR e o parâmetro p. A palavra 'parábola' significa aplicação e pode ser entendida como igualdade. Na elipse, o quadrado da ordenada NP é menor que este retângulo (a palavra 'elipse' significa falta). Na hipérbole, é maior (a palavra 'hipérbole' significa excesso).

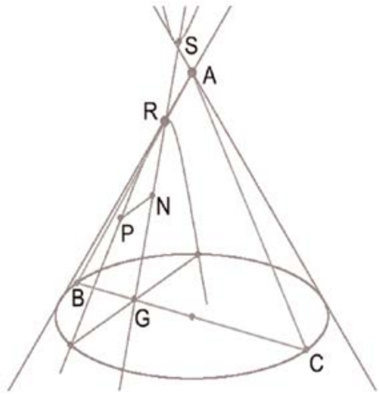
Como propriedade fundamental da parábola, afirma em linguagem moderna (página 46 de [1]): $NP^2 = p \cdot NR$, onde p é o parâmetro $\frac{AR \,.\, BC^2}{AB \,.\, AC} = p$.



Como propriedade fundamental da elipse afirma (página 56 de [1]) em linguagem moderna:

$$NP^2 = p.NR + p.NR^2 / 2RS$$

onde p é o parâmetro. Note que o quadrado da ordenada NP é menor que o retângulo p · NR




Chasles afirma (página 19 de [4]) que Apolônio apresenta ainda as propriedades das assíntotas no livro 2. Na proposição 37 do livro 3, ele mostra uma propriedade que servirá mais de 18 séculos depois para a teoria dos pólos e das polares de Philippe de La Hire. Apresenta, *pela primeira vez*, "os pontos originados pela aplicação" (que depois Kepler chamaria de focos) na proposição 45 do livro 3. Define-os como sendo pontos da reta que contém o eixo cujas distâncias aos vértices desse eixo produzem um retângulo que equivale a um quarto da figura (retângulo cujos lados são o eixo e o parâmetro desse eixo). A partir da definição dos focos, apresenta as propriedades óticas. Nas primeiras 23 proposições do livro 4, enuncia a divisão harmônica verificada pelas retas que cruzam o plano da cônica. No livro 5 (página 20 de [4]), mostra toda sua originalidade a respeito de máximos e mínimos de áreas formadas com a utilização das cônicas. Nas proposições 12, 22, 30 e 31 do livro 7, cria resultados sobre os diâmetros conjugados. O oitavo livro foi perdido, mas foi reconstituído por Halley e pelo árabe Ibn al-Haytham.

Sobre a propriedade bifocal, Bongiovanni afirma (página 62 de [1]) sobre Apolônio:

> *"La proposition LI du livre III démontre que la différence des distances de chaque point d'une hyperbole aux deux foyers est constante et égale à la longueur de l'axe transverse".*

Diz que na proposição 51 do livro 3, apresenta a propriedade bifocal da hipérbole: a diferença das distâncias de um ponto qualquer da hipérbole aos focos é constante e igual ao eixo. Na proposição seguinte, apresenta a propriedade da soma constante para a elipse.

Essas são as propriedades que virariam uma caracterização das cônicas na obra de La Hire, alvo dessa dissertação.

### DIOCLES

Diocles (por volta de 190 a.C.) explorou o potencial das propriedades que envolvem os focos através das 16 proposições da sua obra “Espelhos Ardentes”. Apresentou diversas aplicações para as propriedades óticas das cônicas, partindo da caracterização Foco e Diretriz. Bongiovanni afirma na página 64 de [1]: *« L’oeuvre de Dioclès utilize la propriété foyer-directrice pour résoudre des problèmes de réflexion des rayons lumineux.* Traduzindo: *«A obra de Diocles utiliza a propriedade do foco e diretriz para resolver os problemas de reflexão dos raios luminosos».*

### PAPPUS

Chasles afirma (página 28 de [4]) que Pappus foi um autor com grande originalidade que desenvolveu novos resultados e que também reapresentou diversos resultados criados por autores que o precederam nos oito livros da sua “Coleção Matemática”. Na proposição 129 do seu livro VII, apresenta o conceito da Razão Anarmônica que quando igual a 1 é chamada de Harmônica e que serve de base para o método original de Philippe de La Hire em seu livro de 1673. Segundo Bongiovanni, Pappus apresentou a caracterização Foco-Diretriz sobre as cônicas feita por Euclides e / ou Aristeu. Utilizou tal definição para a resolução do problema da trisseção de um ângulo, entre outras coisas.

### SERENUS

Chasles afirma (página 47 de [4]) que Serenus (contemporâneo de Pappus) apresenta a elipse como uma seção feita através um cilindro e não somente através do cone.

## 2.2.2 – OS ÁRABES

Os árabes tiveram papel essencial na manutenção de diversas obras gregas. Os 4 últimos livros de Apolônio sobre cônicas, por exemplo, só chegaram a nós através de suas traduções (o último foi supostamente reconstituído). Além de utilizar as seções cônicas para resolver os problemas clássicos gregos, eles também se destacaram pela sua aplicação na Ótica, na Estática e na Astronomia. Os autores árabes que citarei a seguir foram apresentados por Bongiovanni [1] que, por sua vez, teve como fonte as traduções de Roshdi

Rashed. Apenas para Ibn Al-Haytham é que Bongiovanni utiliza também uma outra fonte: J. P. Hogendijk.

## BANU MUSA

Os irmãos Muhammad, Ahmad e Hasan, conhecidos como Banu Musa (final do século IX d.C.), traduziram as "Cônicas de Apolônio". Em seguida, escreveram obras próprias. Em uma delas, é observada a definição bifocal da elipse sem referência ao cone.

Bongiovanni afirma na página 73 de [1]:

*"Rashed, R. dans les Actes du Colloque de la SIHPAI (1997) présente un article intitulé 'Les commencements des mathématiques archimédiennes en arabe : Banu Musa' où on peut observer la définition bifocale de l'ellipse sans référence au cône. Il signale que les frères Banu Musa ont laissé divers ouvrages de géométrie et que selon le témoignage des mathématiciens al Sijzi et Ibn al-Samh (mort en 1035), al-Hasan a rédigé un ouvrage sur l'ellipse intitulé 'Sur une figure ronde oblongue'. Une version d'une compilation de cet ouvrage nous est parvenue et selon le livre d'Ibn al-Samh 'le cheminement d'al-Hasan Ibn Musa' s'articule de la manière suivante: il part de la figure circulaire allongée définie par la proprieté bifocale : MF + MF' = 2a, où 2a est la longueur du grand axe, pour ensuite établir que la section plane d'un cylindre de révolution par un plan non parallèle aux bases a les mêmes propriétés que cette courbe. Il passe ensuite à la determination de l'axe de l'ellipse, pour enfin étudier les propriétés de ses cordes, ses flèches, etc."*

Traduzindo o parágrafo acima:

*"Rashed, R. nos anais do colóquio de SIHPAI (1997) apresenta um artigo intitulado 'Os primórdios dos matemáticos arquimedianos em árabe: Banu Musa' onde se pode observar a definição bifocal da elipse sem referência ao cone. Ele sinaliza que os irmãos Banu Musa deixaram diversas obras de geometria e que segundo o testemunho dos matemáticos al Sijzi e Ibn al-Samh (falecido em 1035), al-Hasan escreveu uma obra sobre elipse intitulada 'Sobre uma figura redonda e alongada'. Uma versão de uma compilação desta obra foi obtida por nós e de acordo com o livro de Ibn al-samh "o caminho da Musa Ibn al-Hasan" é organizado da seguinte forma: inicia-se a partir da figura circular alongada definida pela propriedade bifocal: MF + MF '= 2a, onde 2a é o comprimento do eixo principal, e, então, estabelece que a seção plana de um cilindro circular por um plano não paralelo às bases tem as mesmas propriedades que esta curva. Ele então passa para a determinação do eixo da elipse e, finalmente, estudar as propriedades das cordas, flechas, etc."*

Podemos deduzir que o texto de Hasan utiliza a soma das distâncias de um ponto M da elipse aos focos F e F' (igual ao comprimento do Eixo Maior) como caracterização da elipse. Depois, parte para provar que uma curva com essa propriedade é a mesma que aquela obtida por Serenus quando seccionou um cilindro de revolução por um plano não paralelo à base circular. Em seguida, determina o eixo da elipse e estuda as propriedades das cordas e das flechas, etc. Vale frisar que, após caracterizar as cônicas através do plano, ele passa para o espaço.

## IBRAHIM SINAM

Na primeira metade do século seguinte, Ibrahim Sinam apresenta uma nova construção no plano para uma parábola que usava a eqüidistância dos seus pontos até uma reta e um ponto (página 74 de [1]). Séculos depois, Johannes Werner (1522) e Claude Mydorge (1641) utilizam essa construção em suas obras sobre as curvas cônicas.

## AL-QUHI

Na segunda metade do século X, Al-Quhi mostrou que os lugares geométricos de centros de círculos poderiam ser usados para obtenção das cônicas, embora permanecesse com a mesma caracterização de Apolônio. Para a elipse e para a hipérbole, usou um círculo diretor que imediatamente produzia a propriedade bifocal.

## IBU SAHL

Outro contemporâneo seu, Ibu Sahl, apresenta propriedades óticas também através da refração em lentes e não apenas através da reflexão em espelhos. Criou equipamentos para a construção das cônicas. Para a parábola, utilizou a propriedade do foco e da diretriz. Para a elipse e para a hipérbole, explorou as propriedades óticas.

## IBN AL-HAYTHAM

Na primeira metade do século XI, Ibn Al-Haytham, reformou a ótica geométrica ao utilizar construções geométricas oriundas das seções do cone. Deu origem a novos problemas que puderam ser resolvidos através das cônicas.

### AL-KHAYYAM

Na segunda metade do século XI, Al-Khayyam, usou sistematicamente as cônicas para a solução de equações de terceiro grau.

### AL-TUSI

Al –Tusi, um seguidor de Al-Khayyam da segunda metade do século XII, continuou e aprofundou seu trabalho de resolução de equações através das cônicas. Usou propriedades fundamentais apresentadas pelos gregos para fazer novas caracterizações.

## 2.2.3 – O RENASCIMENTO CULTURAL DA IDADE MODERNA

Após um grande período de poucos progressos no conhecimento científico no velho continente, ressurge o interesse pela legado dos gregos e, por conseqüência, pelas curvas cônicas na Europa. Dois novos métodos para visualização das cônicas surgem: um que as interpreta como projeção de um círculo e outro que utiliza retas como referências, as conhecidas coordenadas da geometria analítica.

### JOHANNES WERNER E MAUROLICO

Bongiovanni (página 85 de [1]) cita René Taton para afirmar que Johannes Werner (1522) dá os primeiros passos na direção do entendimento das cônicas sob um ponto de vista projetivo. Maurolico prossegue nessa nova abordagem.

### KEPLER

Kepler (1571 – 1630) pesquisa a trajetória dos planetas do sistema solar e afirma ser a elipse a curva descrita pela terra no seu movimento ao redor do sol, estando a referida estrela em um dos focos dessa elipse. Bongiovanni afirma (páginas 85 e 86 de [1]) que essa descoberta causa grande impacto e impulsiona o estudo dessas curvas. Kepler retoma a abordagem grega que parte do cone. Em outra obra (onde utiliza a hipérbole para medições do fenômeno da reflexão) faz uma apresentação unificada das cônicas. Ele obtém uma das cônicas a partir de outras, por deformação, sem se servir do cone. Através de uma interpretação mecânica e intuitiva, apresenta pela primeira vez a parábola como limite de uma elipse ou de uma hipérbole (página 86 de [1]). A sua construção da parábola utiliza a eqüidistância dos seus pontos até o foco e até a diretriz. É pioneiro também no uso da palavra "foco". Inova, outra vez, ao afirmar que a parábola possui o segundo foco no infinito, introduzindo esse conceito de "Infinito" na geometria, de acordo com Chasles (página 56 de [4]).

## CLAUDE MYDORGE

Chasles afirma (página 88 de [4]) que Claude Mydorge (1585 – 1647) é o primeiro francês a escrever tratados sobre cônicas (1631 e 1641) retomando o legado grego. Segundo Coolidge [5], suas demonstrações são mais simples que as feitas por Apolônio. De acordo também com Bongiovanni, na página 88 de [1], ele usa pela primeira vez a palavra "parâmetro" para descrever um elemento fundamental das seções cônicas.

## GRÉGOIRE DE SAINT-VICENT

Grégoire de Saint-Vicent (1584 – 1667) calcula, pela primeira vez, a área entre a hipérbole a as assíntotas, de acordo com Chasles (página 92 de [4]). Embora utilize como caracterização aquela de Apolônio, faz outras abordagens, entre elas a obtenção das cônicas por transformações geométricas partindo, por exemplo, de retas. Coolidge afirma (página 35 de [5]) que sua obra de 1647 contém 204 teoremas sobre elipse, 364 sobre parábola e 249 sobre hipérbole.

## DESCARTES

Motivado pela tentativa de resolução de um famoso problema proposto por Pappus no seu sétimo livro, Descartes (1596 – 1650) lança em um apêndice do seu *"Discurso do Método"* as bases da "Geometria Analítica Moderna". Seu método traz a álgebra para dentro universo predominante da geometria da época.

Bongiovanni afirma na página 100 de [1]:

> *"Cette méthode permet une simplification des méthodes d'Apollonius et permet l'étude de nouvelle courbes. Pour rechercher les propriétés d'une courbe il suffit de choisir comme définition une propriété géometrique caractéristique de cette courbe et de l'exprimer au moyen d'une équation entre les coordonnées d'un point quelconque de la courbe. Le traitment de cette équation permet de trouver toutes les autres propriétés de la courbe."*

> *"Este método permite uma simplificação dos métodos de Apolônio e permite o estudo de novas curvas. Para localizar as propriedades de uma curva é só escolher como definir uma propriedade geométrica característica dessa curva e expressá-la através de uma equação entre as coordenadas de qualquer*

*ponto da curva. O manuseio desta equação permite encontrar todas as outras propriedades da curva."*

Descartes afirma que para investigar as várias propriedades geométricas de uma curva é necessário que se conheça uma delas que será usada como definição e exprimir por meio de uma equação as coordenadas de um ponto qualquer dessa curva. Inicia um novo método de classificação das curvas por meio das equações. Em outra obra, utiliza construções mecânicas simples (conhecidas como as "Construções do Jardineiro") para a elipse e para a hipérbole. Para a primeira curva, usa um fio, dois pinos e um lápis e para a segunda, os mesmos elementos e uma régua a mais. Tais construções são justificadas de maneira imediata pela propriedade bifocal da soma e da diferença constante.

## FERMAT

Fermat (1601 – 1665) também classifica as curvas pela sua equação. Seu método consiste em manipular as coordenadas de um ponto da curva até que propriedades familiares apareçam. Produz as equações das cônicas, segundo Bongiovanni (páginas 103 e 104 de [1]).

## VAN SCHOOTEN

Van Schooten (1615 – 1660), discípulo de Descartes, publica um tratado "Description Organique des Coniques" que fornece vários métodos de descrição das cônicas por movimento contínuo, de acordo com Chasles (página 98 de [4]).

Entre eles, um proposto por Proclus, que gera a elipse através do movimento de um ponto contido num segmento cujas extremidades deslizam sobre um par de retas (essa construção é conhecida hoje como "Compasso Elíptico", pois pode ser usada para uma construção mecânica da elipse).

## GIRARD DESARGUES

Para Chasles (páginas 74 a 88 de [4]), Girard Desargues (1593 – 1662) trata as cônicas sem se servir do "Triângulo pelo Eixo" proposto por Apolônio, lançando as bases da geometria projetiva. Vê as cônicas como perspectivas de um círculo como base, visto a partir do vértice do cone, dentro de um plano secante de projeção que pode ser uma mesa. Isto permitiu transportar para as cônicas as propriedades válidas para o círculo. Este tratamento permitiu o primeiro tratamento unificado de diversas cônicas incluindo o círculo e um par de retas. Sua abordagem permite uma generalização maior que qualquer outra. Ao procurar as propriedades do círculo que se conservavam por perspectiva, introduziu um novo objeto matemático: a involução. Uma grande parte da sua obra publicada em 1639 se dedica a este conceito. Parte da sua produção, inclusive o resultado que ficou conhecido como "Teorema de Desargues", só foi descoberta em 1845 graças a uma cópia feita por Philippe de La Hire.

## BLAISE PASCAL

Na mesma visão projetiva, Blaise Pascal (1623 – 1662) enuncia em sua obra de 1640 (com 17 anos!) o Teorema do Hexagrama Místico que ocupa lugar central na sua teoria de cônicas. Segundo Chasles (página 70 de [4]), este teorema produz uma aplicação importante: qualquer cônica é completamente definida por cinco pontos. Esta obra foi perdida, mas foi teve o seu início resgatado por Leibniz (1676) e, na sua totalidade, por M. Bossut (1779).

## BONAVENTURA CAVALIERI, JAN DE WITT E ISAAC NEWTON

Nas páginas 106 a 110 de [1], Bongiovanni afirma que Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647), Jan de Witt (1629 – 1672) e Isaac Newton (1643 – 1727) apresentam construções das cônicas a partir de retas sem se servir do cone. Este último, interessado no movimento dos planetas, tem especial interesse na geração das cônicas a partir da reta tangente que representa a velocidade do planeta. Jan de Witt é citado por La Hire no prefácio do livro "Novos Elementos das Seções Cônicas" como uma referência para a sua época, embora achasse o seu método de obtenção das cônicas confuso.

## PHILIPPE DE LA HIRE

**Philippe de La Hire** (**1640 – 1718**) escreve três obras (**1673, 1679** e **1685**) dedicadas às seções cônicas.

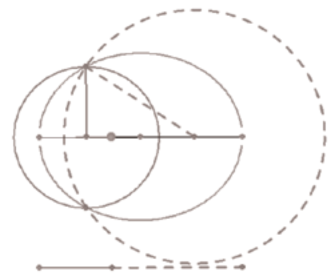
Nessa época, acabara de surgir a geometria analítica de Descartes e seu status era crescente no meio matemático. La Hire escreveu a primeira e a terceira obras segundo influência da geometria sintética grega. Já a segunda obra utiliza a nova abordagem analítica nos dois últimos livros, mas mantém a linguagem sintética no primeiro livro.

**1 –** A primeira obra, de 1673 [8], *"Nouvelle methode en geometrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques qui ont pour bases des circles, ou des paraboles, des elipses, & des hyperboles"* tem duas partes. Na primeira parte, enuncia 20 lemas sobre divisão harmônica que usam retas e circunferência para, em seguida, utilizá-los em 30 proposições relativas às seções de um cone. Na segunda parte, a partir de retas no plano, obtém curvas exclusivamente no plano que prova serem aquelas obtidas como seções de um cone. Denomina essas curvas por "planicônicas". Não é muito bem compreendido nessa obra, o que de alguma forma motiva o surgimento da obra de 1679.

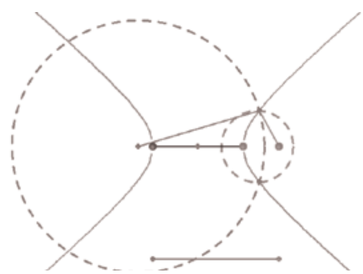
**2 –** A segunda obra (1679 – tema central dessa dissertação – [6]) tem 452 páginas, fora o prefácio da primeira parte e é dividida em três livros.

O primeiro livro *"Novos Elementos das Seções Cônicas"* faz uma abordagem exclusivamente no plano. Caracteriza as cônicas separadamente, a partir da propriedade bifocal. Seu enfoque é sintético.

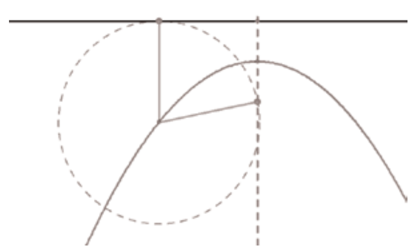
Para a elipse, utiliza como caracterização a soma das distâncias de um ponto qualquer da curva a dois pontos dados (focos) constante e igual a um segmento dado. Sua construção utiliza dois círculos centrados nos focos e cuja soma dos raios vale um segmento dado.



Para a hipérbole, a diferença constante entre as distâncias de um ponto qualquer da curva a dois pontos dados (focos) e igual a um segmento dado. Sua construção utiliza dois círculos centrados nos focos e cuja diferença dos raios vale um segmento dado.



Para a parábola, utiliza a distância de um ponto qualquer P da curva até um ponto dado (foco) igual à distância de P até uma reta dada.



Tais caracterizações são usadas, em seguida, para provar 17 proposições sobre a parábola, 20 sobre a elipse (mais dois lemas) e 24 sobre a hipérbole; ao final, faz 5 problemas de construção das cônicas a partir de outros dados que não sejam os focos.

O segundo livro *"Os Lugares Geométricos"* apresenta diversos lugares geométricos e as respectivas equações analíticas que os representam. Em seguida, faz uma série de definições a respeito dos lugares geométricos e apresenta modelos básicos de equações a fim de transformar equações mais complicadas nesses modelos. Por fim, associa determinadas equações a lugares geométricos pré-definidos fazendo as demonstrações. Seu enfoque é totalmente analítico.

O terceiro livro *"A Construção das Equações Analíticas"* faz a construção geométrica das soluções das equações analíticas, utilizando os lugares geométricos apresentados no segundo livro. Seu enfoque é também analítico. Vale frisar que essa obra de 1679 (principalmente os dois últimos livros) é citada por Boyer [2], Chasles [4] e por Fontenelle [12] como de grande relevância para a história da geometria analítica.

**3 –** A terceira obra, de 1685 [9] – *"Sectiones conicae in novem libros distributae"* ou *"Grand Livre des Sections Coniques"* na tradução para o francês – é a mais abrangente entre as três obras. Volta a utilizar a divisão harmônica e a sua ocorrência no espaço. Retoma a primeira e a segunda obras e as expande, organizando as suas 304 proposições em 9 livros. No final, faz uma comparação com as proposições dos livros de Apolônio, mostrando quais foram cobertas pela sua obra, podendo o leitor comparar quais os caminhos percorridos nas suas demonstrações pelos dois autores. Esta é a obra que tornou La Hire realmente conhecido em toda a Europa. É considerado o seu livro de maior destaque, entre os mais de **13** que escreveu, conforme cita Fontenelle em [12].

## 2.2.4 – A OPINIÃO DE COMENTADORES SOBRE A OBRA DE LA HIRE (1679).

### MICHEL CHASLES – [4]

Michel Chasles utiliza cerca de 12 páginas das cerca de 565 do seu livro sobre métodos em geometria para La Hire, sendo 1 relativa à obra sobre a qual escrevemos.

Na página 127 de [4], afirma que diversos autores tiveram essa obra como referência:

> *"Dans le traité de 1679, De La Hire définit les sections coniques des courbes, telles que la somme ou la différence des distances de chacun de leurs points à deux points fixes, est constante, ou bien dont chaque point est à égale distance d'un point et d'une droite fixes. De ce seul point de départ, il conclut un grand nombre de propriétés de ces courbes.*

*Cette manière de présenter la théorie des coniques a été adoptée par plusieurs géomètres, qui en ont fait la base de leurs ouvrages; tels que marquis de Lhopital, R. Simson, Guisnée, Mauduit, etc."*

Traduzindo:

"No tratado de 1679, De La Hire define as seções cônicas das curvas, de modo que a soma ou diferença das distâncias de cada um de seus pontos em dois pontos fixos é constante, ou ainda como os pontos equidistantes de um ponto e uma linha fixa. A partir desse ponto de partida, ele encontrou um grande número de propriedades destas curvas.

Esta forma de apresentar a teoria das cônicas foi adotada por um grande número de geômetras que a tomaram como base para suas obras, como Marquês de Lhopital, R. Simson, Guisnée, Mauduit, etc."

Chasles se concentra na primeira e terceira obras e faz diversos comentários ressaltando a originalidade de La Hire. Mas indica que a obra de 1679 serviu de referência para outras obras feitas posteriormente. Entre elas destacamos a do Marquês de L'Hôpital [14] que apresentaremos mais adiante.

## VINCENZO BONGIOVANNI – [1]

Nas 96 páginas do seu resumo histórico das cônicas, Vincenzo Bongiovanni [1] dedica 6 páginas a La Hire, sendo 3 relativas à obra que nos concentramos nessa dissertação. Não faz qualquer comentário sobre qual seria a relevância dessa obra de Philippe de La Hire. Ao contrário de Chasles e Coolidge, dedica sua maior atenção a esta obra de 1679.

## JULIAN COOLIDGE – [5]

Julian Coolidge dedica 5 páginas a La Hire, sendo 1 relativa à obra que escolhemos, dentre as 154 páginas do seu resumo histórico relativo às cônicas. Ele faz o seguinte comentário sobre a referida obra: "It would be hard to find a book offering an easier introduction to the conics". Coolidge, portanto, considera fácil a compreensão dessa obra. Talvez seja este o seu maior mérito: a simplicidade. Como fala La Hire no seu prefácio, para a leitura do texto se faz necessário apenas os seis primeiros livros de Euclides, ou seja, a geometria euclidiana usual. Coolidge dedica maior atenção à terceira obra (1685).

## CARL B. BOYER – [2] E [3]

Além dos três comentadores já citados, tivemos acesso ainda a dois livros de Carl B. Boyer: "*History of Analitic Geometry*" [2] e "*A History of*

*Mathematics"* [3]. Neles, fica evidente a influência dos dois últimos livros da obra de 1679 de La Hire para a geometria analítica.

La Hire é citado como inovador quando apresenta, pela primeira vez (página 211 de [6]), uma equação analítica para uma superfície (no caso, um parabolóide de equação $\mathbf{2ax + a^2 = y^2 + z^2}$, em linguagem atual)[1].

Boyer escreve na página 121 de [2]: *"This is important as the first example of a surface given analytically by means of an equation"*. Traduzindo: *"Isso é importante como o primeiro exemplo de uma superfície dada analiticamente por meio de uma equação."*

Na página 412 de [3]: *"Lahire provided one of the first examples of a surface given analytically through an equation in three unknows – which was the first real step toward solid analytic geometry".*Traduzindo: *"Lahire deu um dos primeiros exemplos de uma superfície dada analíticamente através de uma equação em três variáveis - que foi o primeiro passo real para uma geometria analítica sólida."*

Boyer afirma que La Hire teve pelo menos um termo por ele criado que foi adotado pela maior parte da comunidade matemática: "A Origem" do par de eixos coordenados (página 216 de [6]).

Na página 121 de [2] afirma: *"Of Lahire's notation analytic, only the word 'origin' was retained by his successors".*Traduzindo: *"Da notação analítica de Lahire, apenas a palavra "origem" foi mantida por seus sucessores."*

Diz ainda, na página 411 de [3]: *"Of his analytic language only the term 'origin' survived.".* Traduzindo: *"De sua linguagem analítica apenas o termo 'origem' sobreviveu."*

Esta divisão em três partes desta obra de La Hire (um início sobre cônicas, seguida da definição de lugares geométricos e, finalmente, da construção geométrica das equações) foi adotada por outros autores como Jacques Ozanam (citado na página 126 de [2]):

> *"This triple division of the new geometry – made up of first a general theory of conics; then a study of equations, especially of second degree; and finally the application of intersecting curves to the solution of equations – had become a tradition which persisted well into the following century."*
>
> *Traduzindo: "Esta divisão tripla da nova geometria - formado primeiro por uma teoria geral das cónicas, em seguida, um estudo de*

Obs. 1: Boyer comete um erro tanto na obra mais geral [3] quanto na mais específica [2] ao indicar a superfície que aparece no segundo livro da obra de 1679 de La Hire. Em vez da equação do parabolóide mostrada acima (presente em La Hire [**6**]), Boyer escreve uma equação de um cone $\mathbf{x^2 + 2ax + a^2 = y^2 + z^2}$, supostamente escrita por La Hire.

> *equações, especialmente de segundo grau e, finalmente, a aplicação de interseção das curvas para a solução de equações - tinha se tornado uma tradição que se manteve no século seguinte."*

Também foi seguido por N. Guisnée, como mostra na página **149** de [2]: *"This work is a direct continuation of the tradition set in the preceding century by Descartes, de Witt, Lahire e Ozanam".* Traduzindo: *"Este trabalho é uma continuação direta da tradição firmada no século anterior por Descartes, de Witt, Lahire e Ozanam".*

La Hire transita com habilidade nas duas geometrias existentes na sua época, o que suscita os seguintes comentários de Boyer na página **119** de [2]:

> *"Lahire was one of the very exceptional geometers who were able to appreciate both the analitic and synthetic developments in the theory of conic sections". Já na página* **412** *de [3]: "He was the first modern specialist in geometry, both analitic and synthetic".*
>
> Traduzindo:
>
> *"Lahire foi um dos muitos geômetras excepcionais que foram capazes de apreciar tanto os desenvolvimentos analíticos e sintéticos na teoria das secções cónicas". Já na Página 412 de [3]: "Ele foi o primeiro especialista em geometria moderna, tanto analítico e sintético".*

## 2.2.5 – OS AUTORES POSTERIORES A LA HIRE QUE USARAM A CARACTERIZAÇÃO BIFOCAL

### MARQUIS DE L'HOPITAL [14]

Na obra *"Traité analytique des sections coniques, et de leur usage pour la resolution des equations dans les problèmes tant determinés qu' indeterminés»* (1707), obtida por nós através de uma tradução para o inglês de 1723 ("*An analytick treatise of conick sections, and their use for resolving of equations in determinate and indeterminate problems*), Guillaume L'Hopital segue a mesma caracterização bifocal da soma, diferença e eqüidistância usada por La Hire na obra que é alvo do nosso estudo, mas faz uma construção mecânica, em vez da construção por pontos usada por La Hire. A partir desta caracterização, demonstra 481 proposições. Montucla se refere na página 169 do volume 2 de [15] ao fato dessa obra póstuma sobre cônicas ser uma referência no gênero e ter como base a obra de Philippe de La Hire:

> *"M. de La Hire servit utilement les mathématiques dès la fin du siècle dont nous parlons, par divers ouvrages et divers mémoires relatifs à l'analyse des lignes courbes, et à la construction des équations supérieures;*

*mais son travail à cet égard le cède en tout point à celui de M. de l'Hôpital, ouvrage posthume de ce savant géomètre, et qui a long-temps été réputé comme classique en ce genre."*

Traduzindo:

*"M. de La Hire serviu intensamente aos matemáticos do final do século que estamos falando em vários livros e artigos diversos sobre a análise de linhas curvas e sobre a construção das equações superiores; mas o seu trabalho nesta área é superado em todos os aspectos pelo de M. Hospital, obra póstuma do sábio geômetra, que há muito tem sido reconhecido como clássico em seu gênero. "*

Mesmo achando-a inferior à de L'Hopital, ele deixa claro que a obra de La Hire serviu de base para esta obra seguinte.

#### GABRIEL-MARIE

Frère Gabriel-Marie, em seu tratado de geometria conhecido como F. I. C. [10], adota a mesma caracterização bifocal da soma, diferença e eqüidistância usada por La Hire e demonstra 86 proposições a partir desta definição. Esta obra será mostrada com mais detalhes no capítulo 8, pois essa obra será comparada com o texto de Philippe de La Hire.

#### DANDELIN

Chasles afirma na página 286 de [4] que Dandelin fornece uma maneira rápida de se obter os focos da seção cônica dados o cone e o plano de corte. Como mostra o F. I. C. [10] na proposição 818, ele utiliza a propriedade bifocal para justificar que a curva obtida na seção de corte é uma cônica.

### 2.2.6 – AUTOR POSTERIOR A LA HIRE QUE CRITICOU SUA CARACTERIZAÇÃO BIFOCAL

#### HENRI LEBESGUE [13]

Henri Lebesgue, em seu livro sobre cônicas de **1942**, faz uma nova proposta para o ensino das cônicas e critica a forma como eram ensinadas as seções cônicas. Ao analisar o programa escolar da época, discorda da forma isolada como eram apresentadas as três curvas.

Na página 1 [13], ele inicia o seu livro dizendo:

*"Le caractère arbitraire et disparate des définitions des trois coniques m'avait choquè dès mes années d'études au Lycée. Ce n'est*

*pourtant que très tardivement, et egacé d'avoir à faire chaque année aux élèves de l'École de Sèvres des leçons à partir de ces définitions, que je me suis décidé à exprimer mon opinion ..."*

Traduzindo :

*"O caráter arbitrário e destoante das definições da três cônicas chocou-me durante os meus anos de estudo no ensino médio. Mas por ter que fazer uma exposição a cada ano para os alunos da Escola de aulas de Sèvres a partir dessas definições que eu decidi expressar minha opinião ..."*

Ele não acha as três definições para as curvas cônicas usadas bem conectadas. Na página 2 [13], diz:

*"Mais il faudrait à une élève une singulière pénétration pour deviner pourquoi on envisage, plutôt que d'autres, le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes a une valeur donée; et pourquoi, par exemple, après avoir envisagé le lieu analogue relatif à le différence, on ne passe pas au produit des distances, mais au lieu des points également distants d'un point et d'une droite."*

Traduzindo :

*"Mas seria preciso um aluno com uma penetração singular para adivinhar por que ele está considerando, ao invés de outros, o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias entre dois pontos fixos tem um valor fixo e porquê, por exemplo, depois de ter exposto o lugar geométrico análogo para a diferença, não o fez para o produto das distâncias, mas em vez de pontos igualmente distantes de um ponto e uma reta."*

E prossegue criticando a caracterização bifocal na página 3 [13]:

*"Autre étrangeté Après avoir étudié trois lieux, arbitraires et disparates en apparence, on avoue qu'il s'agissait d'un seul et même lieu : celui des points définis par un foyer, une directrice et une excentricité. Pourquoi ne l'avoir pas dit un début, pourquoi ne pas avoir étudié un seul lieu arbitraire et non trois? "*

Traduzindo:

*"Outra esquisitice, depois de estudar três lugares, aparentemente arbitrários e díspares, ele admite que são um único lugar: os pontos definidos por uma foco, uma diretriz e uma excentricidade Por que você não dizer desde o começo, por que não estudar um lugar arbitrário e não três?"*

Nas páginas **5** e **6** de [13], atribui a La Hire a origem dessa caracterização:

*"Cet exposé avait été imaginé à l'époque des débuts de la theorie géometrique; il est dû, dans son príncipe, à de La Hire (1640 – 1718), qui y fut conduit par l'étude des engrenages, des épicycloides, des constructions de cercles, des systèmes de cercles.*

*La découverte de Dandelin tard venue n’a pas été utilisée, comme il eût été possible, pour revenir à la définition d’Apollonius ne pouvait être pour eux que provisoire, il n’y avait aucun advantage considérable à utiliser la définition provisoire d’Apollonius plutôt que celle de La Hire”.*

Traduzindo :

*“Esta apresentação foi pensada na época do início da teoria geométrica, que é devida, a princípio, a La Hire (1640 - 1718), que se notabilizou pelo estudo de engrenagens, epiciclóide, construções de círculos, os sistemas de círculos.*

*A descoberta de Dandelin vinda mais tarde, não foi utilizada, como teria sido possível, para voltar à definição de Apolônio, uma vez que seria apenas temporária, já que não havia nenhuma vantagem significativa para usar a definição de trabalho de Apolônio, em vez daquela de La Hire “.*

Lebesgue acha a abordagem bifocal (usada por La Hire no livro de 1679) ruim por não permitir uma unificação das cônicas. O seu livro defende o uso de outra caracterização (Foco e Diretriz) e de outra forma de exposição.

## 2.2.7 – CONCLUSÃO DESTE RESUMO HISTÓRICO

Este breve resumo mostra que a propriedade bifocal surge pela primeira vez na história na obra de Apolônio que faz a sua definição a partir da seção do cone. Não assume, entretanto qualquer papel de destaque, ou seja, não se constitui uma caracterização para as cônicas.

Os árabes propõem aplicações da propriedade bifocal, principalmente as propriedades óticas. Um deles, Al-Hasan (um dos irmãos conhecidos como Banu Musa), vai além ao propor uma caracterização bifocal, mas em seguida ele vai provar que ela implica na caracterização espacial originada no cilindro, ou seja, retorna ao espaço. Não explora essa sua caracterização para a obtenção de novas propriedades.

Na página 125 de [4], Charles afirma que toda caracterização das curvas cônicas fazia uso do cone, até a obra de Descartes: *Jusqu’à Descartes, il n’y avait eu qu’une maniére de concevoir la génération des coniques, c’était dans le solide; c’est-à-dire, dans le cône à base circulaire. «*

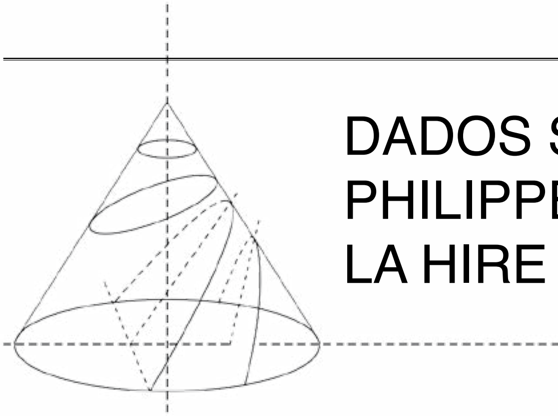
A partir do século XVI, a caracterização bifocal começa a ganhar mais destaque, pois ela permite as construções contínuas das cônicas. Kepler, Descartes e Van Schooten propõem construções mecânicas para a obtenção dessas curvas. Algumas outras caracterizações surgem: por meio de retas, por meio da geometria projetiva, por meio das equações analíticas. Apesar dessas novas categorias de caracterização, além da usual feita a partir do cone, essa caracterização bifocal foi a que teve maior utilização nos textos direcionados para o ensino das cônicas, no século XX no Brasil, juntamente com a caracterização analítica.

Embora não tenha sido a caracterização bifocal das cônicas aquela que mais atenção dedicou, La Hire tem o mérito de fazer um tratado sobre cônicas que obtém um grande conjunto de proposições a partir desta caracterização bifocal, o que se constitui uma novidade para a época. São 61 propriedades geradas a partir das distâncias aos focos. Outros autores seguem essa proposta (L'Hopital, R. Simson, Guisnée, Mauduit, Ozanam) conforme citam Chasles [4] e Boyer [2]. Essa caracterização se vincula imediatamente à geometria analítica e passa a ser muito utilizada para a descrição das curvas cônicas.

Já Lebesgue critica essa caracterização. Não vamos entrar no mérito da questão, ou seja, discutir quais as vantagens e desvantagens da caracterização bifocal. Embora tudo o que foi aqui colocado já forneça elementos para o início de uma discussão, este não é o objetivo dessa dissertação. Queremos nos concentrar na defesa da relevância de Philippe de La Hire para a história do ensino das cônicas.

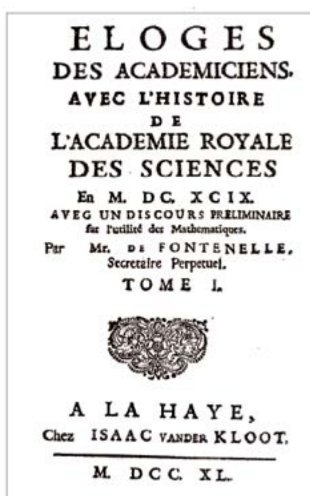
Finalmente, observando a forma como o ensino de cônicas é feito hoje e também a partir das fontes consultadas, podemos desconfiar claramente da importância histórica dessa obra para o ensino. Embora conscientes da necessidade de pesquisa mais consistente para dar mais força à nossa conjectura, temos elementos suficientes, sob o nosso ponto de vista, para dar a essa obra uma maior atenção e fazer dela o tema da nossa dissertação. Um texto didático que pode contribuir na formação do professor merece ser alvo de investigação.

CAPÍTULO 3



# DADOS SOBRE PHILIPPE DE LA HIRE

As informações sobre Philippe de La Hire que serão expostas a seguir foram extraídas de um tributo aos cientistas da Academia Real de Ciências (França) feito por Bernard de Fontenelle (1657 – 1757) em 1699 e reeditada em 1740. La Hire figura entre os 58 acadêmicos homenageados nessa obra por ter sido eleito membro, em 1678, dessa academia que havia sido fundada em 1666. Bernard de Fontenelle era secretário da Academia Real de Ciências e esse vínculo sugere uma pista sobre como se deu o seu contato com La Hire. A seguir é mostrada a capa da obra:



ELOGES
DES ACADEMICIENS.
AVEC L'HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES SCIENCES
En M. DC. XCIX.
AVEC UN DISCOURS PRELIMINAIRE
sur l'utilité des Mathematiques.
Par Mr. DE FONTENELLE,
Secretaire Perpetuel.
TOME I.

A LA HAYE,
Chez ISAAC VANDER KLOOT.

M. DCC. XL.

## 3.1 – UM RESUMO DO TRIBUTO A PHILIPPE DE LA HIRE FEITO POR BERNARD DE FONTENELLE.

La Hire nasceu em Paris em 18 de março de 1640.

Seu pai, Laurent de La Hire, era pintor da corte real e professor da Academia de Pintura e Escultura. Ele era conhecido por seus títulos e, principalmente, por jamais ter tido um mestre que lhe ensinasse, o que lhe trazia grande reputação.

O destino parecia lhe reservar essa mesma profissão. Ele dominava perfeitamente o desenho, inclusive a perspectiva, tão necessário ao pintor, embora muito negligenciado. Apesar de os Quadrantes não se relacionarem diretamente com a pintura, ele estudava também a Gnomonique (métodos universais para traçar os relógios solares ou quadrantes sobre qualquer tipo de superfície) por ser uma espécie de perspectiva. O mais leve pretexto que lhe foi suficiente para ampliar o seu conhecimento sobre o encaixe de círculos que formam a esfera e suas projeções sobre diferentes planos acabou impregnando o seu espírito com extrema naturalidade. O universo de Platão parece ter se apoderado da sua alma. Aquele jovem pintor se tornaria, então, um grande geômetra.

Ele perdeu seu pai aos 17 anos. Após uma enfermidade contínua, ele sucumbiu diante de um violento ataque do coração. Ele achou que uma permanência na Itália, que era extremamente necessária para a sua arte, poderia ser útil para o seu equilíbrio naquele momento. Ele partiu para a Itália em 1660.

No país onde o Saber da Antiguidade deixou uma influência maior do que em qualquer outro e onde tais vestígios fizeram surgir excelentes obras modernas, ele não fez outra coisa senão direcionar sua atenção para os diferentes objetos que se misturavam na sua imaginação sobre as "Sementes do Belo". Mas em Veneza, onde a vida é mais ociosa, a menos que você não se permita ceder a tais tentações, ele se dedicou intensamente à geometria, principalmente às seções cônicas de Apolônio. A geometria começa a prevalecer na sua preferência, ainda que encoberta de forma árdua e assustadoramente soberana nos Livros Clássicos. A atenção que reservava aos modernos ia ficando reduzida.

A vida que levava na Itália lhe agradava. Sua personalidade sábia e séria se ligava a um país onde todo estrangeiro é sério e sábio. O ambiente de folia reinante não o afetava. Ele desejava prolongar a sua permanência (já estava há 4 anos), quando sua mãe, a quem era muito ligado, clamou o seu retorno à França.

Ao retornar, ele continua seus estudos em geometria, sempre de forma profunda e contínua. Desargues (que era um dos poucos matemáticos de Paris) e Abraham Bosse (famoso gravador) haviam feito a primeira parte de um tratado sobre o corte de pedras, assunto que era novidade na época. Quando começaram a fazer a segunda parte, eles se embaraçaram e procuraram

La Hire, que utilizou sete proposições da sua teoria sobre as cônicas. Bosse o publicou como uma brochura em folhas. Foi assim que La Hire se tornou conhecido como geômetra.

Ele aumentou sua fama por causa de duas obras que viriam em 1673 e 1679. Ele se concentrou nas seções cônicas, exceto por um pequeno tratado sobre a ciclóide, curva muito popular na época.

Enfim, sua popularidade aumentou muito, em pouco tempo, a ponto de ser feito membro da Academia Real de Ciências em 1678.

No ano seguinte, ele publica um volume com três tratados que tinham por título: o primeiro, *"Novos Elementos das Seções Cônicas"*; o segundo, *"Os Lugares Geométricos";* o terceiro, "*A Construção ou Efetuação das Equações".* Os dois últimos são feitos para desenvolver os mistérios da "Geometria de Descartes". Este autor deixou muito a ser decifrado, muito a ser esclarecido. Esta á a característica dos livros originais. Seu livro era próprio para produzir muitos outros, ainda bastante originais. Exatamente o que ocorreu com o livro de La Hire. Seus princípios eram bem expostos, apesar da dificuldade natural deste assunto. Trinta anos depois, já bastante conhecido dos geômetras, uma questão foi colocada na Academia na ocasião dos escritos do Sr. Rolle. La Hire precisou apenas consultar a sua obra para retomar sua argumentação. Ele não tinha dúvida da validade dos seus princípios e discutia a questão da universalidade, a forma como poderiam ser aplicados, pois são suscetíveis a uma infinidade de graus, diferenças e de esquisitices aparentes durante a sua prática.

Sr. Colbert havia concebido um mapa geral do reino francês mais exato que todos os precedentes. Hábeis engenheiros já haviam trabalhado nos mapas dos litorais, mais importantes que os demais por causa dos portos do Mediterrâneo. Suas obras tinham sido feitas em partes isoladas e para uni-las, era necessário fazer observações celestes, o que demandava uma certa habilidade. Por isso que o Sr. Picard e La Hire foram designados pelo rei para irem a Bretanha em 1679 e no ano seguinte para a Guyenne. Eles fizeram uma correção muito importante no litoral de Gascônia, ao retificar uma curva, o que provocou uma redução de terras. De forma que o rei chegou a falar, em tom de brincadeira, que sua viagem só lhe havia causado prejuízo. Prejuízo que enriqueceu a geografia e que tornava mais segura a navegação.

Em 1681, La Hire se separou de Picard para determinar a localização de Calais e Dunxerque. Ele mediu também a largura do Estreito de Calais desde a ponta do Bastião de Risban que está no litoral do Mediterrâneo na direção de Bolonha até o Chateau Douvre na Inglaterra. Ele achou 21360 toesas (unidade de medida da época). Ele tinha medido na borda do Mediterrâneo por volta de 2500 toesas que foi o fundamento da sua obra *"Triângulos"*. Esse tipo de atividade não exigia uma teoria requintada, mas sim uma grande destreza, uma grande precisão do operador, atuação delicada e precauções engenhosas. Enfim, sua grande utilidade compensava o pouco do brilho geométrico. O público prestava um grande favor aos geômetras quando eles colocavam em prática os seus saberes. Eles se sacrificavam pelo prazer e pela glória das altas especulações.

Para finalizar um mapa geral, La Hire foi ao litoral de Provence em 1682. Em todas as suas viagens, ele não se furtava ao direito de fazer diversas observações. Seja sobre agulha imantada, sobre as refrações, sobre a altura das montanhas através de um barômetro. Ele não seguia apenas as ordens do rei, mas também o seu gosto e seu prazer pelo conhecimento.

No mesmo ano de 1682, ele fez um tratado sobre a "Gnomonique" e o reimprime em 1698, ampliado e embelezado. Esta ciência não era mais que uma prática, relegada na maior parte das vezes aos operários pouco inteligentes e grosseiros que não reconheciam os pontos onde falhavam, pois cada um se contentava com o seu quadrante e nenhuma comparação era feita. La Hire ilumina a "Gnomonique" com os princípios e as demonstrações que tornam as operações mais seguras e fáceis. Para não retornar ao estado antigo, ele teve o cuidado de imprimir as demonstrações de uma forma diferente das operações, o que deu aos simples operários a comodidade de saltar onde quisessem.

Nós já falamos do famoso meridiano iniciado pelo Sr. Picard no ano de 1669. La Hire continuou o lado norte de Paris em 1683, uma vez que o Sr. Cassini ficou responsável pelo lado sul, mas nem um nem outro finalizaram sua tarefa. Sr. Colbert, então morto em 1683, teve sua grande empreitada interrompida. O Sr. De Louvois delegou a diversos geômetras da academia os grandes nivelamentos necessários para os aquedutos e aos condutores de água que foram planejados pelo rei. Em 1684, La Hire fez o nivelamento do pequeno Rio de Eure que passa pelo Chartres. Ele achou a nascente a 10 léguas além dos arredores de Chartres. Ela era 81 pés mais alto que o reservatório da Grota de Versailles. Esta novidade foi agradavelmente compensada pelos ministros do rei, uma vez que as águas do Eure eram captadas a 25 léguas de Versailles. Mas La Hire imaginava que antes do início da parte mais pesada da obra, seria bom retomar o nivelamento, pois ele poderia ter se enganado em qualquer medição ou em algum cálculo. Ele temia que um erro poderia provocar no ministro uma desconfiança sobre o seu conhecimento. O Sr. de Louvois, impaciente em servir ao rei segundo seus gostos, sustenta que La Hire não teria se enganado e estava obstinado dentro de sua perigosa modéstia. La Hire não concorda e recomeça o nivelamento que diferirá do primeiro de um ou dois pés.

Ele fez vários outros nivelamentos por ordem do mesmo ministro, pois ele se tornara um perito na questão de conduzir águas. Aquele trabalho feito em Versailles elevou para um nível mais alto a ciência do "Nivelamento e Hidráulica". O rei pagava as despesas de viagem dos matemáticos que ele empregava. La Hire, por causa do seu escrúpulo e da sua superstição, apresentava ao Sr. de Louvois o relatório diário, onde nem as frações eram negligenciadas. O ministro, com um desprezo servil, rasgava sem lê-los e exigia de suas liderados o mesmo comportamento.

Ele estava tão familiarizado a La Hire que era comum largar tudo para ouvir as suas exposições com o intuito de aprender, uma vez que o espírito das ciências e o da corte não eram incompatíveis.

Em 1685, foi finalizada sua grande obra intitulada *"Sectiones Conicae in Novem Libros Distributa"*. Ele contém toda a teoria das seções cônicas, sobre a qual ele já havia se debruçado antes. Pela primeira vez, toda a teoria era deduzida a partir de princípios novos e muitos simples. Esta obra alcançou grande reputação na comunidade científica européia. La Hire passou a ser respeitado como um autor original em um assunto que perpassa por toda a geometria e tem grande utilidade, pois serve como base para especulações mais elevadas.

Dois anos depois, La Hire se mostra como astrônomo, ao fornecer tabelas sobre o sol e sobre a lua e um método mais fácil para o cálculo dos eclipses. Ele se envolve, em 1689, com um problema importante da astronomia: a descrição de uma máquina de sua invenção que mostra todo eclipse passado e todos os que estavam por vir. Os meses e os anos lunares e suas epactas. Esta máquina era muito simples e continha um pêndulo que movimentava a máquina. Um imperador da China observou a máquina e recomendou que seus mandarins da astronomia fossem observá-la.

As tabelas sobre o sol e sobre a lua (que La Hire fez em 1687) foram corrigidas, em seguida, por vários observadores, mas os seus fundamentos também valiam para todos os outros planetas. Ele publica em 1702 uma reunião dessas idéias sob o título *"Tabula Astronômica Ludovici Magni Jussu et Munificentia Exaratae"*. Temos que levar em conta o contexto daquela época. Nós repetiremos, contudo, que dentro daquelas tabelas todos os movimentos dos astros são obtidos imediatamente de um farto conjunto de observações assíduas e não de alguma hipótese de curva descrita pelos corpos celestes. Portanto, não se pode ter uma astronomia mais pura e mais isenta que essa mistura de imaginações humanas.

La Hire fornece (em 1689) uma de suas primeiras tabelas, um pequeno tratado de geometria prática sob o título *"Escola de Agrimensores"*. Ele foi reimpresso em 1692, bem ampliado. A rapidez dessa reimpressão mostra a grande utilidade deste pequeno livro que só seria comprado por quem de fato o utilizasse, além de justificar o fato da astronomia se rebaixar à agrimensura.

Em 1694, ele torna público os seus quatro tratados que foram impressos ao fim do segundo volume das Memórias da Academia em 1692 e 1693.

O primeiro destes tratados é sobre a epiciclóide. Curva compreendida através da mesma formação geral da ciclóide só que com mais detalhes e que lhe sucedeu quando ela foi quase esgotada pelos geômetras. La Hire se envolveu com esse tema por um duplo charme: sua novidade e sua dificuldade. Ele descobriu tudo o que se relaciona com a epiciclóide: suas tangentes, suas retificações, seus quadrantes, seus desenvolvimentos. É tudo que se pode ter sobre uma curva na mais sublime geometria.

Um fruto bastante útil desse trabalho, segundo sua própria opinião, foi direcionado para a "Mecânica", felicidade muito rara entre as curvas curiosas. Ela teve reflexo nas máquinas que possuíam engrenagens, pois os dentes faziam sobre os outros esforços muito grandes, o que provocavam as suas quebras. Para diminuir essas rupturas, além da vantagem de distribuir os esforços ao longo da estrutura, precisava-se dar aos dentes um outro formato que seria determinado pela geometria. Para os dentes terem essa propriedade desejada, La Hire descobriu que eles deveriam ter a forma de um arco da epiciclóide. Ele executou sua idéia com sucesso no Chateau de Beaulieu a 8 léguas de Paris em uma máquina para elevar água.

Conseguir uma aplicação para uma descoberta de uma nova curva não é tarefa simples. Mas o caso da aplicação da epiciclóide na engrenagem constitui uma exceção, uma vez que é impensável atualmente uma máquina motora sem engrenagens. Apesar de sua monstruosa utilidade, sua descoberta foi negligenciada.

O segundo tratado dos quatro que nós falamos era uma explicação sobre os principais efeitos do gelo e do frio. O terceiro era sobre as diferenças entre os sons da corda de uma trombeta marinha. O quarto era sobre os diferentes acidentes da visão.

Este último é o mais curioso e o mais interessante. É uma ótica inteira, não uma ótica geométrica que só aborda os raios refletidos, mas uma ótica física que leva em consideração a geometria e que considera uma luneta viva, animada, muito complicada na sua construção, sujeita a diversas mudanças que se chama olho. La Hire examinou tudo que pode chegar à vista segundo as diferentes constituições do olho ou os diferentes acidentes que podem surgir. Estas pesquisas específicas, quando bem aprofundadas, envolvem um grande número de fenômenos, geralmente complicados, singulares, contrários em aparência uns dos outros e que não têm menos dificuldade que as pesquisas mais gerais.

La Hire, em 1695, fez o seu *"Tratado de Mecânica"*. Ele não se contentou com a teoria desta ciência que ele funda com demonstrações exatas. Ele se liga fortemente a tudo que se tem de principal para a prática das artes. Ele se eleva mesmo até os princípios da arte divina que é construir o universo.

Aqueles que não conhecem um matemático podem imaginar que um geômetra, um mecânico, um astrônomo não podem estar no mesmo matemático. Mas quando se é um pouco mais instruído e se observa mais de perto, vê-se um homem inteiro que abraça uma certa parte da matemática em toda a sua extensão. Um homem raro e de extremo vigor de gênio que pode abraçar todos até certo ponto. Um gênio mesmo, mas que não se furta a um trabalho assíduo e perseverante. La Hire une as duas habilidades e se constitui um verdadeiro matemático universal. Além disso, tinha grande conhecimento dos detalhes das artes, caminho tão conhecido e tão pouco percorrido. Pode-se dizer que em La Hire residia uma verdadeira academia de ciências.

E ainda tem mais. Ele foi por muito tempo professor de arquitetura, onde o objeto é diferente de tudo que já foi falado que ele fez. Ele ocupa cada cargo como se tivesse uma única ocupação. Acrescente a La Hire ainda um bom desenhista e um hábil pintor de paisagem.

Em 1702, gravou dois planisférios de 16 polegadas de diâmetro com os desenhos que havia feito. As posições principais foram determinadas por suas próprias observações.

Em 1704, o rei resolve colocar dentro dos dois últimos pavilhões de Marli dois grandes globos. Como a obra durava certo tempo ele teve a curiosidade de ir assistir. Ele delegou a La Hire que se engajou nas explicações e nos discursos sobre a ciência e se percebia sua alegria para desempenhar tal tarefa. É uma vantagem rara um sábio cair no gosto de um príncipe, como também um príncipe cair no gosto de um sábio.

Outra obra de La Hire que relataremos, cujo recenseamento não pode ser preciso por causa da multidão, encontra-se uma grande quantidade de revelações importantes que ele divulgava, seja pelos jornais, seja dentro das histórias da academia, mas principalmente esta última. Não havia época do ano que ele não as enriquecesse com vários presentes igualmente consideráveis, seja pela beleza, seja pela variedade.

Ele fez infinitamente mais que dar ao público excelentes obras de sua própria composição; ele contribuiu com obras de outras pessoas. Sr. Picard, que muito trabalhou na ciência do "Nivelamento", quando ficou doente, entregou a La Hire tudo o que havia feito sobre o assunto e pediu que ele o imprimisse com as modificações que julgasse necessárias. La Hire cumpriu o seu desejo e publicou um livro em 1684 intitulado *"Tratado de Nivelamento do Sr. Picard acrescido de uma luz do Sr. de la Hire com suas adições"*. Paralelamente, ele publica, em 1686, o *"Tratado de Nivelamento das Águas e de outros Corpos Fluidos"*, obra póstuma do Sr. Mariotte, onde uma parte foi passada a limpo quando ele morreu e a outra foi colocada sobre os papéis do autor que foram encontrados segundo sua vista. Pode-se crer que a sua generosidade em trabalhar em obras dos outros se deve aos laços de amizade que por eles nutria. Mas isso não diminui a sua glória de executar estas tarefas.

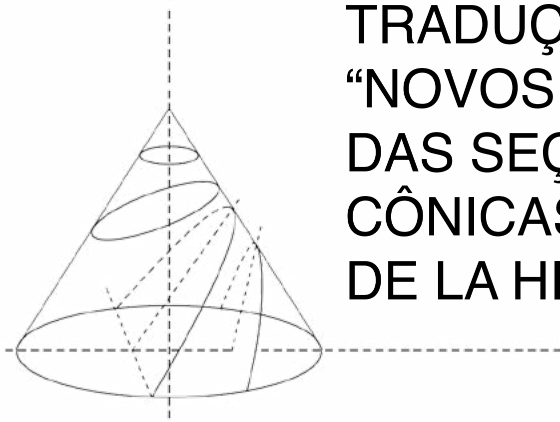
Tudo o que aqui foi dito sobre as mais diferentes obras que nos deu, nos dá uma idéia não somente da assiduidade em seu escritório, mais ainda da saúde muito firme e muito vigorosa que possuía. Ele aprontou das suas desde que se curou das enfermidades da juventude e de suas grandes palpitações do coração por causa de uma febre quartã, curada inesperadamente. Ele passou a confiar muito na natureza, diminuindo muito a sua estima pela medicina. Todo os seus dias eram ocupados pelos estudos e suas noites pelas observações astronômicas. Nenhum divertimento era capaz de lhe tirar do trabalho. Nenhum outro exercício corporal que não fosse ir ao Observatório da Academia de Ciências, dar aulas de arquitetura, idem no Colégio Real onde ele também era professor. Poucos conseguem compreender a felicidade de um solitário por uma escolha todos os dias renovada. Ele teve a sorte de não ser minado lentamente pela idade nem ter uma velhice longa e inerte. Quanto a seu espírito, ele jamais envelheceu. Depois das enfermidades de um mês ou dois, ele morreu sem agonia em 21 de abril de 1718 com a idade de 78 anos.

Ele foi casado duas vezes e teve oito filhos. Cada um dos seus casamentos forneceu um acadêmico.

Dentro de todas as suas obras em matemática, ele se serviu da "Síntese", a maneira de demonstrar dos clássicos pelas linhas e pelas proporções entre as linhas, freqüentemente difícil por sua concentração e por sua complicação. Não é que ele não conhecesse a "Análise Moderna", mais rápida e menos embaraçada, mas ele tinha conhecido na sua juventude o outro método que se tornou seu hábito. Além disso, as verdades geométricas descobertas pelos clássicos são incontestáveis, o que nos leva a crer também que esse método não pode ser abandonado sem algum perigo. Enfim, os novos métodos que são de alguma forma fáceis, funcionam como uma espécie de glória a que temos que nos resignar.

Ele tinha uma polidez exterior, uma circunspeção, uma prudente timidez do seu país que ele amava tanto. Ele era eqüitativo e desinteressado, não somente na verdadeira filosofia, mas também no Cristianismo. Sua motivação habitual de examinar tantos objetos diferentes e discutir com curiosidade aprisionou a sua visão da religião, uma piedade sólida, isenta de desigualdades e singularidades que reinou sobre todo o curso da sua vida.

CAPÍTULO 4



# TRADUÇÃO DA OBRA: "NOVOS ELEMENTOS DAS SEÇÕES CÔNICAS" (PHILIPPE DE LA HIRE - 1679)

## PREFÁCIO DO AUTOR

Já faz alguns anos que eu publiquei um tratado sobre as seções cônicas em um novo método, onde eu demonstrei suas principais propriedades dentro de um cone. Mas aqueles que não estão muito familiarizados com demonstrações sobre interseções entre plano e sólido têm muita dificuldade para entender, mesmo sendo simples quando compreendidas. Isto me impulsionou a procurar outra maneira de, sem me servir do cone, descrever simplesmente as linhas curvas sobre um plano para demonstrar as mesmas propriedades observadas dentro do sólido. Mesmo achando-a a mais simples e bela de todas, eu tive que abandonar aquela proposta, uma vez que não foram superadas as dificuldades encontradas.

Mas eu fiquei satisfeito em reduzir as seções cônicas ao plano, as quais nomeei planicônicas. Eu aplicarei a essas seções cônicas as mesmas demonstrações que eu fiz para os sólidos. E eu posso dizer que esta obra teve a boa sorte de merecer a aprovação de muitos nobres geômetras.

Embora seja muito vantajoso agradar renomados geômetras, nós priorizamos como o principal foco dessa obra esquecer o conhecimento prévio daqueles que desejam entender os mistérios da natureza. E eu acho que eles ficarão satisfeitos em descobrir várias formas de fazer a mesma coisa. Então, pode-se escolher o caminho preferido.

Eu não enumerarei os vários importantes autores que escreveram sobre este tema, nem seus métodos para descrever as curvas. Eu falarei apenas da diferença entre o meu método e o de Mr. De Witt, o qual vem sendo considerado o melhor.

Ele faz uso de um método particular para descrever cada seção. Especialmente na parábola e na hipérbole fica um emaranhado de linhas que formam certos ângulos entre si. Isto quer dizer que fica difícil ter uma clara e plena idéia da formação das curvas para quem deseja aprender.

Já a descrição que eu utilizo, feita a partir das propriedades principais dos focos, tem como regra apenas um segmento que na elipse é igual à soma e na hipérbole é igual à diferença entre dois outros segmentos que vão dos focos até o ponto da curva descrita. E na parábola, a soma e a diferença são iguais, uma vez que seus focos pertencem a seu eixo, supõe-se que um deles esteja a uma infinita distância do outro. Assim os segmentos que unem um ponto qualquer da curva aos focos terão soma e diferença igual ao segmento que está localizado no infinito.

Estas são as propriedades que estão sendo muito utilizadas em geometria, especialmente na astronomia e na ótica.

Eu acredito que Mr. De Witt não visualizou um método harmonioso para a descrição das curvas que simplificasse as demonstrações. Ele não o trouxe para a elipse quando demonstrou as propriedades dos diâmetros. A demonstração que eu forneço tem conformidade com os clássicos, mas ela é mais simples. Este livro contém todas as propriedades elementares das seções cônicas e a geometria requerida não vai além dos seis primeiros livros de Euclides ou o seu conteúdo descrito por outros renomados geômetras. Eu não mudei de forma alguma os nomes dados pelo Apolônio às curvas: primeiro porque eram os termos mais familiares e segundo porque eu usei exatamente a mesma ordem de apresentação que ele usou.

A parábola leva este nome pela igualdade que existe entre o quadrado da ordenada de um diâmetro e o retângulo formado cujos lados são o parâmetro e a parte do diâmetro compreendida entre sua extremidade e o encontro com a ordenada. É o eu demonstro na proposição 1 e no corolário da proposição 14.

A elipse é assim nomeada por causa do quadrado da ordenada de um diâmetro que se compara em grandeza ao retângulo formado pelo parâmetro e pela parte do diâmetro compreendida entre sua extremidade e seu encontro com a ordenada **subtraído** de um retângulo que possui um lado igual ao segundo lado do retângulo anterior e é semelhante à figura (retângulo cujos lados são o parâmetro e o diâmetro), como demonstro nas proposições 5 e 18.

A hipérbole é assim nomeada por causa do quadrado da ordenada de um diâmetro que se compara em grandeza ao retângulo formado pelo parâmetro e pela parte do diâmetro compreendida entre sua extremidade e o encontro com a ordenada somado a um retângulo que possui um lado igual ao segundo lado ao retângulo anterior e é semelhante à figura (retângulo cujos lados são o parâmetro e o diâmetro), como demonstro nas proposições 3 e 22.

Neste tratado você encontrará o que há de mais importante no primeiro livro de Apolônio, as propriedades das assíntotas (segundo livro), as primeiras proposições do terceiro livro, bem como as que tratam dos focos.

Já sobre proporções, eu uso composição, divisão e igualdade de razões. Porque eu acho que o meu leitor sabe inverter, alternar ou converter os termos de uma proporção.

## PARTE 1 – A PARÁBOLA

### A OBTENÇÃO DA PARÁBOLA

Se uma reta $AD$ e um ponto $F$ fora desta reta forem desenhados sobre um plano, um infinito número de pontos $P$ do plano podem ser encontrados de tal forma que o segmento $FP = PA$ ( $\perp$ a $AD$).

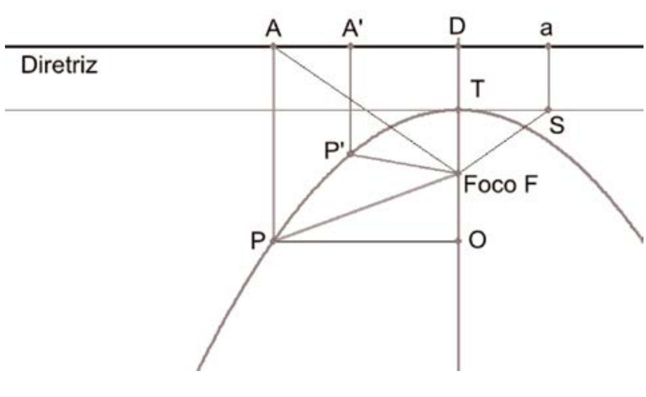



Figura 1

## A CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA

De um ponto $A$ qualquer da reta $AD$, desenhe a reta $AP$ (perpendicular a $AD$) e a reta $FA$. Construa o ângulo $AFP$ congruente ao ângulo $FAP$. Assim, pontos quaisquer $P$ e $P'$ da parábola serão encontrados.

## COROLÁRIO

Pelo ponto ***F***, desenhe uma reta perpendicular à reta $AD$, sendo $D$ a interseção entre elas. Logo existe um ponto médio $T$ do segmento $FD$ que pertence à curva que passa por $P$, $P'$ e $T$. Esta curva pode ser prolongada infinitamente, sendo que ela irá se afastar infinitamente da semi-reta $\overrightarrow{DF}$.

## DEFINIÇÕES

1. O conjunto de pontos formado pelos pontos P, P' e por T formam uma curva denominada ***"Parábola".***
2. O ponto T é chamado ***"Vértice[1]"*** da parábola e o ponto F**,** ***"Foco"*** da parábola.
3. A reta DFO é denominada ***"Eixo de Simetria[2]"*** da parábola. Qualquer parte OT desse eixo, localizado entre T e qualquer ponto O, é chamada ***"Abscissa[1]"*** da parábola.
4. O segmento PO desenhado através de um ponto qualquer P da parábola e perpendicular ao eixo de simetria é chamado ***"Ordenada[3]"*** do ponto P da parábola.
5. Toda semi-reta que tem origem num ponto qualquer P da parábola, sendo paralela ao eixo de simetria e que não cruza AD é denominada ***"Diâmetro"*** do ponto P.
6. A parábola (cônica) divide o plano em duas regiões. Será chamada de ***"Interior[4]"*** de uma Parábola (cônica) a região que contém o foco e de ***"Exterior"*** de uma parábola (cônica) a outra região.
7. Uma reta que encontra a parábola em apenas um único ponto e que passa exclusivamente pelo seu exterior é chamada reta ***"Tangente"*** à parábola no referido ponto.

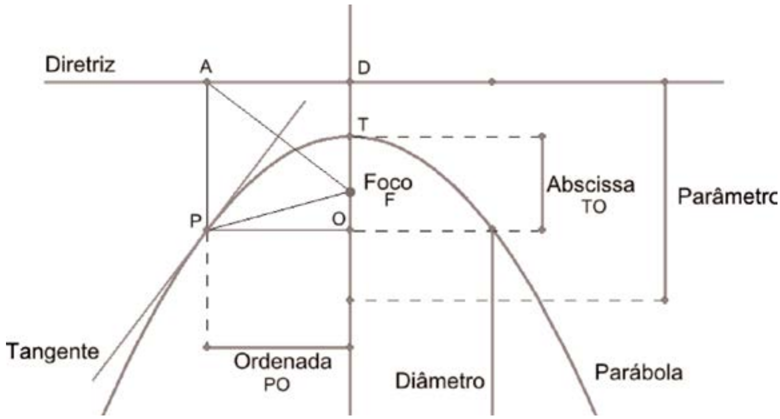



Figura 2

***Obs. 1**: Os termos **"vértice"** e **"abscissa"** não são usados por La Hire, mas Robinson já o utiliza.*

***Obs. 2**: O termo simetria não é usado por La Hire.*

***Obs. 3**: atualmente, é usual colocar um par de eixos perpendiculares XY com origem no vértice da parábola e seu eixo de simetria coincidindo com o eixo Y; atualmente chamamos de **"abscissa"** o que La Hire chamava de **"ordenada"** e de **"ordenada"*** o que Robinson chamava de ***"abscissa"** e La Hire chamava de **"parte do eixo".***

***Obs. 4**: embora não defina, La Hire utiliza o conceito de **"interior"** e **"exterior"** de uma parábola; **"interior"** seria o conjunto de pontos cujos segmentos que os unem ao foco não interceptam a parábola e **"exterior"** seria o conjunto de pontos cujos segmentos que os unem ao foco interceptam a parábola.*

***Obs. 5**: A reta AD utilizada na geração da parábola é hoje denominada **"Diretriz"***

## PROPOSIÇÃO I

***Da figura 2, o quadrado da ordenada PO é igual ao produto da abscissa TO pelo dobro da distância do foco à sua projeção na diretriz 2.FD:***

$$PO^2 = 2 .FD . TO.$$

## PROVA

Na figura ***1***, assuma $TD = a$ e $FO = b$. Logo $FD = 2a$. Pela construção, $DO = AP = FP$.

$DO^2 = FP^2$ (1). Por Pitágoras, $FP^2 = PO^2 + b^2$ (2). Como $DO = 2a + b$, então $DO^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$ (3). Usando (1), (2) e (3), temos:

$PO^2 + b^2 = 4a^2 + 4ab + b^2 \rightarrow PO^2 = 4a(a + b)$. Portanto $PO^2 = 2FD \,.\, TO$

**C. Q. D.**

## COROLÁRIO 1

Desta proposição, observa-se que o quadrado de lado $PO$ é equivalente ao retângulo de lados $2FD$ e $TO$. O segmento $2FD$ é invariante, qualquer que seja o ponto $P$ da parábola. Já a ordenada $PO$ e a abscissa $TO$ dependem do ponto $P$.

## DEFINIÇÃO

8. O segmento $2.FD$ é denominado "Parâmetro" do eixo da parábola.

## COROLÁRIO 2

A distância do foco ao vértice é igual a ***¼*** do parâmetro.

## COROLÁRIO 3

Como o parâmetro é invariante, conclui-se que os quadrados das ordenadas de dois pontos $P$ e $P'$ distintos da parábola estão entre si assim como suas respectivas abscissas:

$$\frac{PO^2}{P'O'^2} = 2FD = \frac{TO}{T'O'}$$

# PROPOSIÇÃO II

***A reta paralela à diretriz $AD$ e que passa pelo vértice $T$ é tangente à parábola.***

## PROVA

**Primeira parte –** Suponha que a reta $TS$ paralela à diretriz $AD$ encontre a parábola em outro ponto $S$ além de $T$ (ver figura 1). Por ser $S$ um ponto da parábola, $FS = Sa$ (assim como $FT = TD$). Como $TD = Sa$ (pelo paralelismo), logo $FS = FT$. Isto é um absurdo, pois teríamos uma hipotenusa $FS$ igual a um cateto $FT$.

**Segunda parte –** É ainda menos possível que $TS$ seja interior à parábola. Para tanto, a parábola estaria entre $Da$ e $TS$, o que é impossível a partir da construção. Logo, a proposição é verdadeira. **C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO III

***Qualquer diâmetro $PI$ encontra a parábola em um único ponto $P$.***

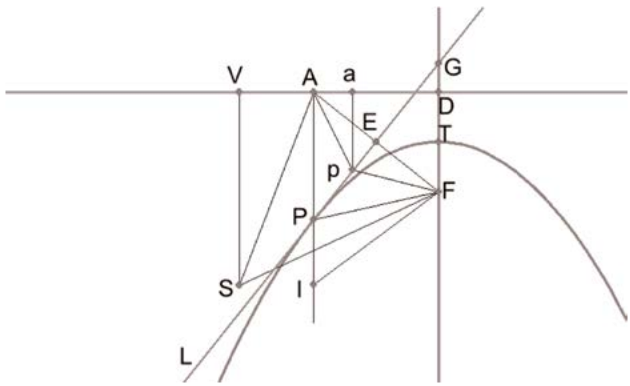



Figura 3

PROVA

Suponha que o diâmetro encontre a parábola, além do ponto $P$, em outro ponto $I$. $IF = IA$ e $PF = PA$, pela definição de parábola. Logo $PF + PI = IF$. Tem-se um absurdo pela desigualdade triangular. Portanto a proposição é verdadeira.

**C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO IV

*Na figura 3, sendo $FE = EA$, então a reta $PE$ é tangente à parábola.*

PROVA

**Primeira parte –** Por absurdo, suponha que o ponto $p$ seja a outra interseção entre a tangente $PE$ e a parábola. Desenhe os segmentos $pF$ e $pa$ (paralelo ao eixo). Como $PpE$ é mediatriz de $FA$, os triângulos $pEA$ e $pEF$ são congruentes (caso $LAL$). Assim $Ap = Fp$ e sendo $ap = Fp$ uma vez que p pertence à parábola, portanto $ap = Ap$. Tem-se um absurdo, pois o ângulo $paA$ é reto ($pA$ deveria ser maior que $pa$). Portanto a reta $PE$ não encontra a parábola no ponto ***p***.

**Segunda parte –** Suponha que a parte $PL$ da reta $EPL$ seja interior à parábola. A partir de qualquer um dos pontos como $S$ da suposta parábola exterior à reta $PL$, desenhe $SF$ até o foco e $SV$ paralela ao eixo. Pela geração da parábola, $SF = SV$. Mas $SA > SV$, pois o ângulo $SVA$ é reto. Portanto $AS > SF$. Isto é um absurdo, pois a linha $EPL$ divide ao meio $AF$ e é perpendicular a ela e $S$ está do mesmo lado que $A$ em relação à reta $EPL$, logo $AS < SF$. Então é evidente, que $S$ não é um dos pontos da parábola e, consequentemente, que a tangente é exterior. **C. Q. D.**

## COROLÁRIO

Seja $G$ a interseção de $PE$ e o eixo de simetria. Como os triângulos $AFD$ e $GEF$ são semelhantes (caso $AA$), o ângulo $FGE = FAD$. O ângulo $FGE = APE$ (paralelismo). Já a medida do ângulo $APE = FPE$ (congruência entre os triângulos $APE$ *e* $FPE$). Pela propriedade transitiva, o triângulo $PFG$ é isósceles e de base $PG$.

## PROPOSIÇÃO V

***A reta tangente que passa pelo ponto*** $P$ ***da parábola é única.***

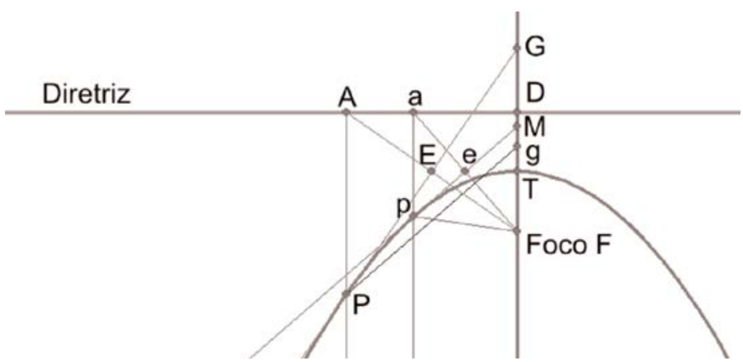



Figura 4

## PROVA

Suponha que fosse possível que outra tangente $Pg$ tocasse a parábola no mesmo ponto $P$. A partir do foco $F$ desenhe $Fa$ perpendicular a $Pg$, $Fa$ encontrará $AD$ em algum ponto como $a$ (pois a tangente $Pg$ sempre encontra o eixo e não pode nunca ser paralela a ele; para tanto ela seria um diâmetro e passaria interiormente à parábola). Ao desenhar $ap$ paralela ao eixo, ela cruza a parábola em $p$. Pela propriedade da parábola, $pF = pa$,. Ao dividir $Fa$ ao meio em $e$, a reta $peM$ tocará a parábola em $p$. Ela será paralela a $Pg$ (pela proposição anterior) uma vez que cada uma delas é perpendicular a $Fa$. Mas a tangente $PE$ encontra a outra tangente pe fora da parábola, uma vez que ambas são tangentes. Assim $Pg \parallel pe$ passará dentro da parábola. Isto é um absurdo, pois supusemos que eram tangentes e consequentemente a sua interseção deveria estar fora. Portanto a proposição é verdadeira. **C. Q. D.**

## COROLÁRIO

Todas as tangentes encontram o eixo de simetria e todos os diâmetros. Além disso, cruzam entre si, uma vez que pela quarta proposição elas não são paralelas.

# PROPOSIÇÃO VI

***É sempre possível traçar uma tangente que faça um ângulo com o eixo (o menor deles) menor que qualquer ângulo dado, desde que este não seja maior que um reto.***

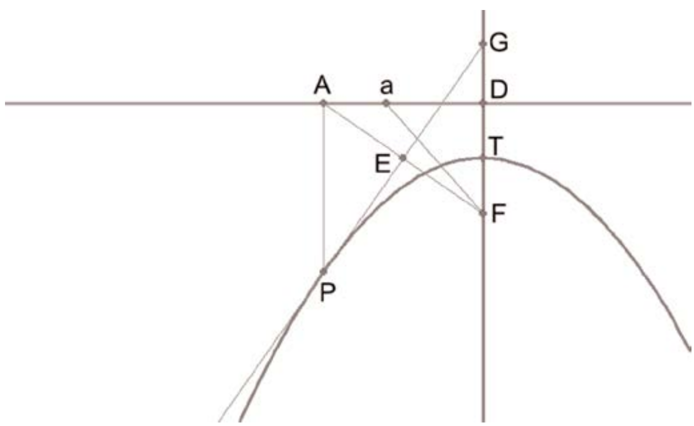



Figura 5

## PROVA

Permita que a reta $Fa$ seja desenhada de tal forma que o ângulo $FaD$ possa ser congruente ao ângulo dado. Então tome o ponto $A$, no outro lado de $a$, com relação ao eixo. É evidente, que o ângulo $FAD < FaD$. Pelo corolário da proposição ***4***, a reta $PEG$ será a tangente à parábola no ponto $P$ e fará com o eixo de simetria um ângulo $PGF = FAD$. Este é menor que o ângulo dado $FaD$.

**C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO VII

***Sendo*** $PG$ ***uma tangente por*** $P$ ***e*** $PO$ ***sua ordenada, então*** $TG = TO$.

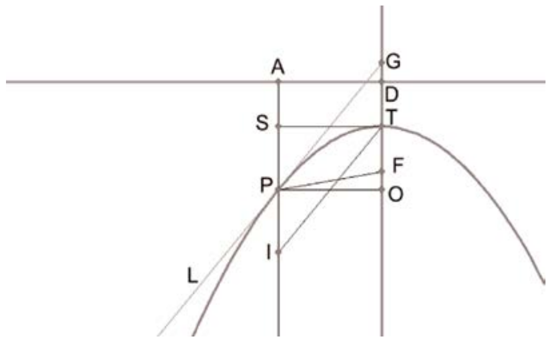



Figura 6

### PROVA

Pelo corolário da proposição ***4***, $FG = FP$. Pela definição de parábola, $FP = PA$. Pelo paralelismo, $PA = DO$. Se dos segmentos congruentes $FG$ e $DO$ forem retirados os segmentos congruentes $FT$ e $DT$, respectivamente, restarão $TG = TO$.

**C. Q. D.**

### COROLÁRIO

Se a tangente $TS$ for traçada através do ponto $T$ for prolongada até encontrar o diâmetro $API$ e se a reta $TI$ for desenhada paralela à tangente $PG$, conclui-se então que $PS$ e $PI$ são iguais, pois $PS = TO$ e $PI = TG$ (pelo paralelismo).

## PROPOSIÇÃO VIII

***Na figura 6, o ângulo*** $IPL$ ***é congruente ao ângulo*** $FPG$.

### PROVA

Do corolário da proposição ***4,*** os ângulos $FPG$ e $GPA$ são congruentes. Já $GPA = LPI$ (ângulos opostos pelo vértice). Por transitividade, o ângulo $IPL = FPG$.

**C. Q. D.**

### COROLÁRIO

O ângulo $LPF = GPI$, pela adição do ângulo $FPI$ aos ângulos iguais $IPL$ e $FPG$.

# PROPOSIÇÃO IX

***Sendo** PM **perpendicular à tangente,***
***o segmento** OM **é metade do parâmetro do eixo**.*

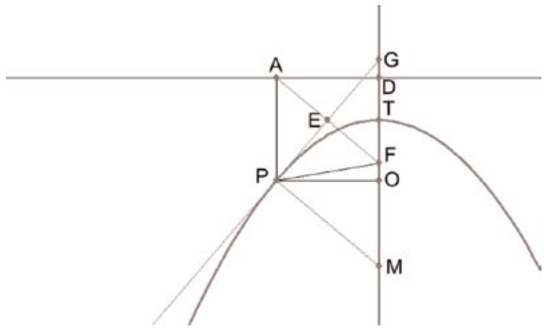



Figura 7

## PROVA

Como os segmentos *AF* e *PM* são paralelos (por construção e pela proposição ***4***), conclui-se que os triângulos *ADF* e *POM* são congruentes (caso *ALA*). Logo *DF = OM*. Pela definição de parâmetro, então *OM* é igual à metade do parâmetro. **C. Q. D.**

# PROPOSIÇÃO X

***Na figura 8, os triângulos** TAH **e** BAP **são congruentes.***

## PROVA

Ao desenhar *PO**,*** perpendicular ao eixo, tem-se que *TO = TH* (pela proposição ***7***). Como *BP = TO* (paralelismo), portanto *BP = TH*. Pelo paralelismo, conclui-se que os triângulos *TAH* e *BAP* são congruentes (caso *ALA*). **C. Q. D.**

## COROLÁRIO

Se *TD // TH* e se a cada um destes triângulos congruentes for adicionado o trapézio *TDPA*, o triângulo *TDB* será equivalente ao paralelogramo *TDPH*. Este também é equivalente ao retângulo *TOPB*, porque eles têm bases iguais *TO* e *TH* e mesma altura. O retângulo *TOPB* é ainda equivalente ao triângulo *POH* pela congruência entre *BAP* e *TAH*.

## PROPOSIÇÃO XI

***Se** eM // PAH **e** FG // BAT, **então o triângulo** EGM*
***é equivalente ao retângulo** GTBF.*

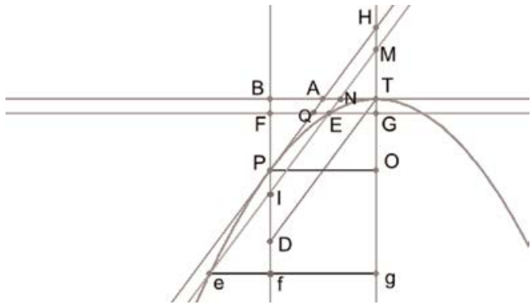



Figura 8

PROVA

Pela semelhança entre os triângulos *EGM* e *POH* (caso *AA*), o triângulo *POH* **:** triângulo *EGM :: PO² : EG²*. Pelo corolário ***3*** da proposição ***1,*** *PO² : EG² :: TO : TG*. Por causa das bases congruentes dos retângulos, tem-se que *TO : TG ::* retângulo *TOPB :* retângulo *TGFB*. Por transitividade, o triângulo *POH :* triângulo *EGM ::* retângulo *TOPB :* retângulo *TGFB*. Mas o triângulo *POH* é equivalente ao retângulo *TOPB* (pelo corolário da proposição ***10***). Portanto, o triângulo *EGM* é equivalente ao retângulo *TGBF*. **C. Q. D.**

Analogamente, demonstra-se que o triângulo *egM* é equivalente ao retângulo *TgfB.*

## PROPOSIÇÃO XII

***A área do triângulo** EFI **é igual a do paralelogramo** PIMH.*

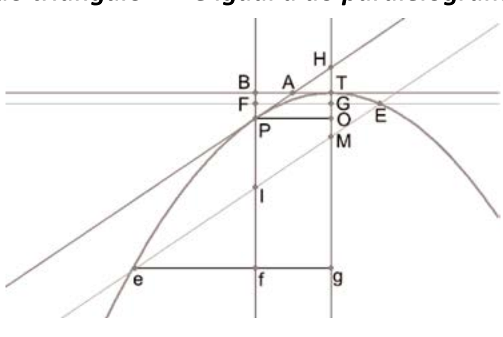



Figura 9

## PROVA

Se o ponto *E* estiver entre *P* e *T* (Figura ***8***), o triângulo *POH* (pelo corolário da proposição ***10***) será equivalente ao retângulo *POTB*. Do triângulo *POH*, retira-se o triângulo *MEG* e do retângulo *POTB* retira-se o retângulo *GTBF* equivalente ao triângulo *MEG* (proposição ***11***). Novamente se das figuras que restaram for retirado o quadrilátero comum *PQGO*, restarão o quadrilátero *EQHM* equivalente ao triângulo *QFP*. Para cada um deles, se for adicionada o quadrilátero comum *PIEQ*, então o paralelogramo *PIMH* será equivalente ao triângulo *EFI*.

Mas se o ponto *E* estiver do outro lado de *T* em relação a *P* (Figura ***9***), o triângulo *ABP* (pela proposição ***10***) será equivalente ao triângulo *TAH*. Adicionando a figura comum *PIMTA*, o paralelogramo *PIMH* terá a mesma área que o trapézio *IMTB*. Se deste for retirado o retângulo *GTBF* e à figura restante *FGMI* for adicionado o triângulo *GEM* (que é equivalente ao retângulo *GTBF* - pela proposição ***11***), então o paralelogramo *PIMH* será equivalente ao triângulo *EFI*.

Finalmente, se o ponto *E* estiver no outro lado de *P* como em *e* (Figura ***9***). O triângulo *TAH* é equivalente ao triângulo *ABP* (pela proposição **10**). Se a figura *TgfPA* for adicionada a cada um, o quadrilátero *HgfP* terá mesma área que o retângulo *TgfB* (que é equivalente ao triângulo *geM* - pela proposição ***11***). Se o quadrilátero comum *MgfI* for retirado do quadrilátero *HgfP* e do triângulo *geM*, então sobram o paralelogramo *PIMH* equivalente ao triângulo *efI*. **C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO XIII

***Se pelo ponto E da parábola (Figura 9) for traçada $Ee \mathbin{/\!/} PH$, então a reta Ee encontrará a parábola em outro ponto e, com $EI = Ie$ (I pertence ao diâmetro PI).***

## PROVA

Primeira parte – Se *BT* for a tangente, então a proposição é conseqüência da propriedade de geração da parábola. Mas se outra tangente *PH* for traçada, então existe uma tangente *tg* (pela proposição ***6***) que fará um ângulo com o eixo, menor que o ângulo *GHP* e do mesmo lado do eixo. Assim a tangente *PH* encontrará a tangente *tg* em um lado de *P* e a tangente *TA* no outro. A reta *Ee* sendo paralela a *PH*, também encontrará as duas tangentes ou fora da parábola ou nela, em cada lado do diâmetro *PI*. Consequentemente *Ee* cruzará a parábola em dois pontos como *E* e *e*, que é a primeira parte da proposição.

Segunda parte – O triângulo *EFI* (pela proposição precedente) é equivalente ao paralelogramo *PIMH,* que é também equivalente ao triângulo *efI.* Pelo paralelismo, os dois triângulos são congruentes. Logo, o segmento $EI = eI$.

**C. Q. D.**

## DEFINIÇÃO

9. O segmento *EI* é chamado ***"Ordenada de um Diâmetro** PI**"*** (ela é // à reta tangente por *P*). Vale frisar que apenas ***Ordenadas do Eixo*** são perpendiculares a este eixo.
10. O segmento *PI* é chamado ***"Abscissa de um Diâmetro** PI**"***.

## PROPOSIÇÃO XIV

***Os quadrados das ordenadas** EI **e** KY **de um mesmo diâmetro** PI **estão um para o outro, assim como as partes deste diâmetro** PI **e** PY**, ou seja,***

$$\frac{EI^2}{KY^2} = \frac{PI}{PY}$$

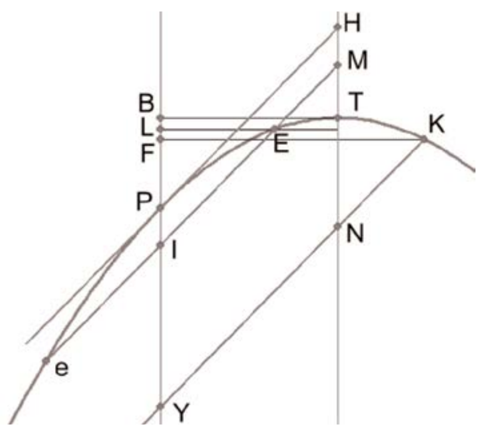



Figura 10

## PROVA

Sendo os triângulos *ELI* e *KFY* semelhantes, o triângulo *ELI* : o triângulo *KFY* :: *EI²* : *KY²*. Pela proposição ***12***, o triângulo *ELI* é equivalente ao paralelogramo *PIMH* e o triângulo *KFY* é equivalente ao paralelogramo *PYNH*. Estes paralelogramos estão um para o outro como *PI* para *PY.* Por transitividade, *EI2 : KY2 :: PI : PY*. **C. Q. D.**

É a mesma coisa se a ordenada **eI** for tomada no outro lado do diâmetro. Ela é igual à ***EI*** (pela proposição ***13***).

## DEFINIÇÃO

11. O ***"Parâmetro de um Diâmetro"*** é a terceira proporcional de qualquer abscissa $PI$ e sua respectiva ordenada $EI$.

## COROLÁRIO

O quadrado de uma ordenada $KY$ de um diâmetro $PY$ é equivalente ao retângulo cujos lados são o parâmetro e a abscissa $PY$.

## PROPOSIÇÃO XV

***Se uma tangente $EQ$ for traçada pelo ponto $E$ da parábola e se pelo ponto $E$ for traçada uma ordenada do diâmetro $EI$, então $PQ = PI$.***

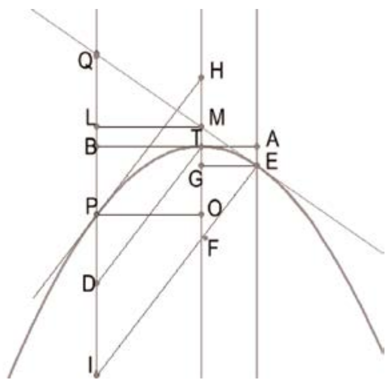



Figura 11

## PROVA

Desenhe: o eixo de simetria $TF$, a tangente $BTA$ por $T$, a tangente $PH$ por $P$, as ordenadas $EI \,//\, TD \,//\, PH$ e $ML \,//\, EG \,//\, PO \,//\, BA$. Pelo corolário ***3*** da proposição ***1,*** $PO^2$ (ou $BT^2$) $: EG^2 :: TO : TG$ ou como seus respectivos dobros ($BD$ para $MG$). Pelo paralelismo e a consequente semelhança dos triângulos $BTD$ e $GEF$, $BT^2 : EG^2 : BD^2 :: GF^2$. Por transitividade, $BD^2 : GF^2 : BD : MG$. Consequentemente $GF$ é a média geométrica entre $BD$ e $MG$. Do mesmo modo, $BT^2$ (ou $LM^2$**)** $: EG^2 :: QL^2 : MG^2$. Por transitividade, $QL^2$ **:** $MG^2 :: BD : MG$. Então, $QL$ é a média geométrica entre $BD$ e $MG$. Consequentemente $GF = QL$. Se a esses dois segmentos forem adicionados segmentos $LB = TG$ e $BP = TH$ (são congruentes pela prop. ***7***), então as duas somas serão iguais. Logo, $PQ = FH = PI$ (pelo paralelismo).

**C. Q. D.**

# PROPOSIÇÃO XVI

***Sendo** $BD$ **uma ordenada do eixo** $AE$**, o parâmetro p do diâmetro** $CB$ **excede o parâmetro** $P$ **do eixo de simetria** $AE$ **em** $4AD$**,** $p = P + 4AE$**.***

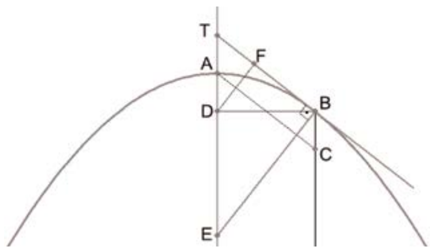



Figura 12

## PROVA

Trace: a tangente $BT$ por $B$ que encontra o eixo de simetria em $T$, $BE$ perpendicular à tangente em $B$, $DF \,//\, BE$ e a ordenada $AC \,//\, BT$. $AC = TB$ e $BC = AT$**,** pelo paralelismo. $AT = AD$ (pela proposição ***7***) e $DE$ = semi-parâmetro do eixo (pela proposição ***9***).

Sejam o parâmetro $P$ do eixo de simetria e o parâmetro $p$ do diâmetro $BC$. Pela proposição ***1*** e pelo corolário da proposição ***14***, tem-se que $AC^2 : BD^2 :: BC \,.\, p : AD \,.\, P$. Estes retângulos tendo alturas iguais estão um para o outro como $p$ para $P$. Pelo paralelismo, $BT = AC$. Pela semelhança dos triângulos $BDT$ e $BDF$, $BT^2 : BD^2 :: BT : BF$. Pelo teorema de Tales, $BT : BF :: ET : ED$. Mas $ET = 2DA + DE$ $(= P/2)$. Então $ET : ED :: 2ET : 2ED$. Mas $2ET = 4DA + P$, e $2ED = P$, portanto $ET : ED :: 4DA + P : P$. Por transitividade $p : P :: 4DA + P : P$. Consequentemente $p = 4DA + P$.

**C. Q. D.**

## COROLÁRIO

Quanto mais distante do eixo estiver um diâmetro, maior será seu diâmetro. Pois ***AD*** aumenta à medida que o diâmetro se afasta do eixo de simetria.

## PROPOSIÇÃO XVII

***Na parábola $AB$ de eixo $AF$, desenhe o diâmetro $BC$ e o segmento $FB$ do foco $F$ até $B$. O segmento $FB$ será ¼ do parâmetro $p$ deste diâmetro.***

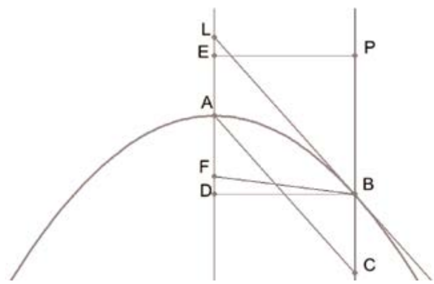



Figura 13

### PROVA

Como $A$ é o vértice, $AE = AF$ ( igual a ¼ do parâmetro do eixo de simetria) e, pela última proposição, o parâmetro do diâmetro $BD$ excede o parâmetro do eixo em $4AC$. Assim $CE$ = **¼** do parâmetro do diâmetro $BD$. Como $CE = BP$ (paralelismo) e $BP = BF$ (pela definição de parábola), portanto $BF$ = **¼** do parâmetro desse diâmetro. **C. Q. D.**

### COROLÁRIO

Visto que nós temos uma nova e simples forma de determinar o parâmetro de qualquer diâmetro, já que ele é sempre o quádruplo do segmento desenhado do vértice do referido diâmetro até o foco da parábola.

# PARTE 2 – A ELIPSE

### A OBTENÇÃO DA ELIPSE

Se sobre um plano for traçado um segmento $IT$ cujo ponto médio é $C$ e os pontos $F$ e $D$ forem tomados com iguais distâncias de $C$. Tantos pontos ***P***, quantos você queira, podem ser encontrados de tal forma que a soma dos segmentos $PF$ e $PD$ se iguala a $IT$.

## A CONSTRUÇÃO DA ELIPSE

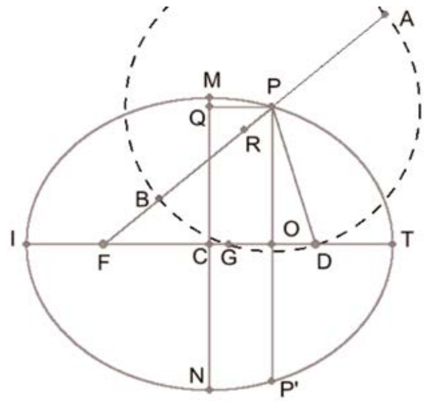



Figura 1

Divida $IT$ em duas partes quaisquer, associando uma delas ao raio de um círculo cujo centro seja $F$ e a outra parte, ao raio de um círculo cujo centro seja $D$. Com esses raios e sobre esses centros descreva dois círculos que interceptarão um ao outro em dois pontos $P$ e $P'$, um deles acima e o outro abaixo do segmento $IT$ e com iguais distâncias dele. O segmento $POP'$ que une os dois pontos $P$ e $P'$ será perpendicular a $IT$. Seguindo da mesma forma, um infinito número de pontos $P$ pode ser encontrado.

## COROLÁRIO

A curva que passa por $P$ e $P'$ também passará através de $I$ e $T$. A curva $PTPI$ será fechada. O segmento $POP'$ será $\perp$ ao segmento $IT$ e será dividido ao meio em $O$ por $IT$.

## DEFINIÇÕES

1. A curva formada por PTP'I é denominada **"Elipse"**.
2. O ponto C é chamado o **"Centro"** da elipse.
3. O segmento IT é denominado o **"Eixo Maior"**.
4. O segmento NCM perpendicular a IT que passa pelo centro C e limitado pela elipse é chamado **"Eixo Menor"**.
5. Os pontos F e D são chamados **"Focos"**.
6. Os segmentos traçados dos pontos da elipse e perpendiculares a um dos eixos são denominados **"Ordenadas"** desse eixo. Assim, PO é uma ordenada do eixo IT.

7. Todos os segmentos que passam através do centro C e são limitados em cada extremidade pela elipse são chamados **"Diâmetros"**.
8. Uma reta que encontra a elipse em apenas um ponto é chamada **"Tangente"** da elipse nesse ponto.

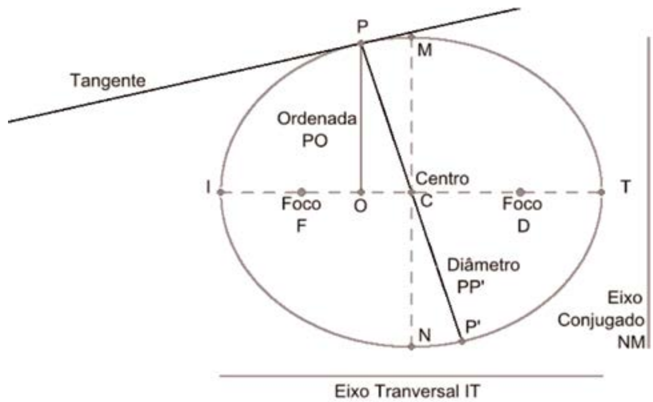



Figura 2

LEMA 1

***Em todo triângulo retângulo como*** *FOP,*

$$\underbrace{(FP + FO)}_{PH} \cdot \underbrace{(FP - FO)}_{PM} = PO^2$$

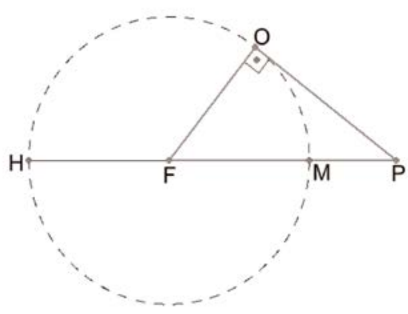



Figura 3

PROVA

Com centro $F$ e raio $FO$, desenhe o círculo $MOH$ e prolongue $PF$ até $H$. O cateto $PO$ tangencia o círculo em $O$ pois o ângulo em $O$ é reto. Assim $PM \cdot PH = PO^2$. **C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO I

***Da figura 1, o quadrado de** $PO$ **(uma ordenada do eixo maior** $IT$**) : retângulo** $IOT$ **:: retângulo** $IFT$ **(ou seu igual** $TDI$**) : retângulo** $ICT$ **(**$CT^2$**). ou seja:***

$$\frac{PO^2}{IO\cdot OT}=\frac{ID\cdot DT}{CT^2}$$

PROVA

Da figura **1**, após prolongar $FP$ até $A$, faça $FA = IT$ e divida-o ao meio em $R$. Com centro $P$ e raio $PD$ $(= PA)$, descreva o círculo $ADB$. Ele encontrará $AF$ em $B$, e $IT$ em $G$, se os pontos $O$ e $D$ não coincidirem. Se eles fossem coincidentes, os três pontos $D$, $O$ e $G$ coincidiriam e o círculo tangenciaria o segmento $IT$ em $O$. Não sendo coincidentes, por potência do ponto $F$,

temos: $\frac{FA}{FD}=\frac{FG}{FB}$ ou as metades: $\frac{FR(=CT)}{CD}=\frac{CO}{RP}$

Pela propriedade de proporção: $\frac{CT}{CT+CD}=\frac{CO}{CO+RP}$ Logo, $\frac{CT}{CO}=\frac{CT+CD}{CO+RP}$

Pela proporção: $\frac{CT}{\underbrace{CT+CO}_{IO}}=\frac{\overbrace{CT+CD}^{ID}}{\underbrace{CT+CD+CO+RP}_{FR+RP+FC+CO=FP+FO}}$ Assim, $\frac{CT}{IO}=\frac{ID}{FP+FO}$ (1)

Da mesma maneira, reassumindo a proposição acima $\frac{CT}{CD}=\frac{CO}{RP}$

Pela propriedade de proporção: $\frac{CT}{CT-CD}=\frac{CO}{CO-RP}$ Assim, $\frac{CT}{CO}=\frac{CT-CD}{CO-RP}$

Pela proporção: $\frac{CT}{\underbrace{CT-CO}_{OT}}=\frac{\overbrace{CT-CD}^{DT}}{\underbrace{CT-CD-CO+RP}_{FR+RP-FC-CO=FP-FO}}$ Logo, $\frac{CT}{OT}=\frac{DT}{FP-FO}$ (2)

Multiplicando (1) e (2): $\frac{CT^2}{IO\cdot OT}=\frac{ID\cdot DT}{(FP+FO)(FP-FO)=PO^2}$

Se os pontos $D$, $G$ e $O$ coincidirem, a demonstração será a mesma, sendo $FG = FO = FD$.

**C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO II

***O produto das partes do eixo maior** $IT$ **formadas pelo foco** $D$ **é igual ao quadrado do semi-eixo menor** $CM$ **(figura 1), ou seja,***

$$ID\cdot DT=CM^2$$

PROVA

Sendo $CM$ uma ordenada por $C$, pela proposição **1**, $PO^2$ vira $CM^2$ e $IO\,.\,OT$ vira $IC\,.\,CT$

então $\dfrac{CT^2}{(IC \cdot CT) = CT^2} = \dfrac{ID \cdot DT}{CM^2}$ portanto, $CM^2 = ID \cdot DT$ **C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO III

***O quadrado do eixo menor da elipse está para o quadrado do eixo maior, assim como o quadrado da ordenada do eixo maior está para o produto das partes deste eixo formadas pela extremidade desta ordenada (figura 1), ou seja,*** $NM^2 / IT^2 = PO^2 / IO\,.OT$.

Pelo proposição 1, $\dfrac{CT^2}{\underbrace{ID \cdot DT}_{(prop.2)\ CM^2}} = \dfrac{IO \cdot OT}{PO^2} O$ Seus dobros: $\dfrac{\overbrace{4 \cdot CT^2}^{IT^2}}{\underbrace{4 \cdot CM^2}_{NM^2}} = \dfrac{IO \cdot OT}{PO^2}$

**C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO IV

***O quadrado do eixo maior da elipse está para o quadrado do eixo menor, assim como o quadrado da ordenada do eixo menor está para o produto das partes deste eixo formadas pela extremidade desta ordenada (figura 1),***

*ou seja,* $\dfrac{PQ^2}{NQ \cdot QM} = \dfrac{IT^2}{NM^2}$

PROVA

*Pelas prop.* ***1*** *e* ***2*** $\dfrac{CT^2}{CM^2} = \dfrac{\overbrace{IO \cdot OT}^{CT^2 - CO^2}}{PO^2}$

*Por ser proporção,* $\dfrac{CT^2}{CT^2 - CT^2 + CO^2} = \dfrac{CM^2}{CM^2 - PO^2}$

*Seus dobros,* $\dfrac{IT^2}{NM^2} = \dfrac{CO^2 (= PQ^2)}{\underbrace{NQ \cdot QM}_{CM^2 - PO^2}}$

**C. Q. D.**

## DEFINIÇÕES

9. O **"Parâmetro de um Eixo"** é a razão entre o quadrado do outro eixo e o referido eixo.
10. *A* **"Figura de um eixo"** é um retângulo cujos lados são o próprio eixo e seu parâmetro.

## COROLÁRIO

O quadrado de um dos eixos é equivalente ***à figura*** do outro eixo.

## PROPOSIÇÃO V

***Sendo o retângulo*** $VXYZ$ ***semelhante ao retângulo de diagonal*** $IY$ ***(a figura de*** $IT$***), então*** $PO^2 = VO.TO$

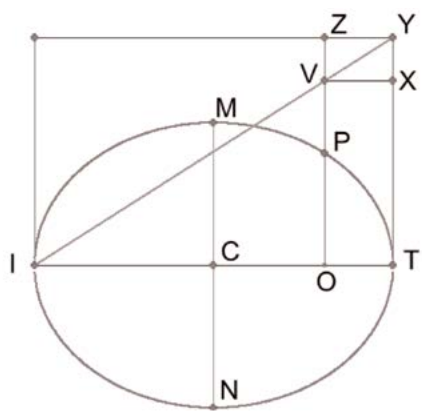



Figura 4

## PROVA

Pela prop. 3, $\dfrac{NM^2}{IT^2} = \dfrac{PO^2}{IO \cdot OT}$ Por causa do parâmetro (prop. 4), $\dfrac{NM^2}{IT^2} = \dfrac{YT}{IT}$

Por semelhança: $\dfrac{YT}{IT} = \dfrac{VO}{IO}$ Multiplicando por OT: $\dfrac{VO}{IO} = \dfrac{VO \cdot OT}{IO \cdot OT}$

Pela propriedade transitiva, $\dfrac{PO^2}{IO \cdot OT} = \dfrac{VO \cdot OT}{IO \cdot OT}$ Simplificando: $PO^2 = VO \cdot OT$

**C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO VI

***Todos os diâmetros como $PR$ são divididos ao meio pelo centro $C$.***

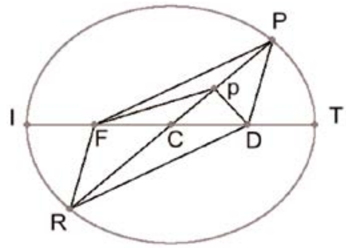



Figura 5

PROVA

Supondo que $CP > CR$, faça $Cp = CR$, desenhe até os focos os segmentos $Fp$, $Dp$, $FR$, $DR$, e $FP$, $DP$. Os dois triângulos $CDp$ e $CFR$ serão congruentes, como igualmente serão os triângulos $CDR$ e $CFp$, pois $CD = CF$ e $CR = Cp$ (Caso $LAL$). Assim $FR = Dp$ e $DR = Fp$. Portanto, $Fp + Dp$ será igual a $IT$, pois $FR + DR$ é igual a ele (da geração da elipse). Mas $FP + DP = IT$, portanto $Fp + Dp = FP + DP$, o que é um absurdo. **C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO VII

***A reta $SI$, perpendicular ao eixo maior e que passa por sua extremidade $I$, tangencia a elipse neste ponto.***

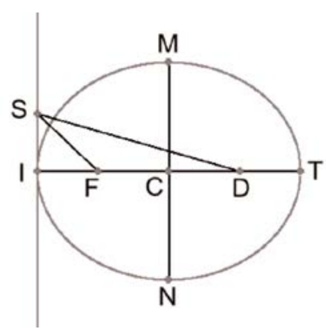



Figura 6

PROVA

Primeira parte – Admita que $SI$ não toque a elipse no ponto $I$ apenas, mas a encontra também em outro ponto $S$. Desenhe as linhas $FS$, $DS$, até os focos. Pela propriedade da parábola, $FS + DS = IT$. Como o triângulo $FIS$ tem um ângulo reto em $I$, $FS$ é maior que $FI$. Assim $DS$ deve ser menor que $TF$ ou $DI$, pois $S$ pertence à parábola. Isto é um absurdo, uma vez que $DS$ é a hipotenusa do triângulo retângulo $DIS$. **C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO VIII

***As mesmas coisas sendo admitidas como na primeira proposição, desenhe a linha $DA$ e a divida ao meio em $E$. A reta $PE$ tangenciará a elipse no ponto $P$.***

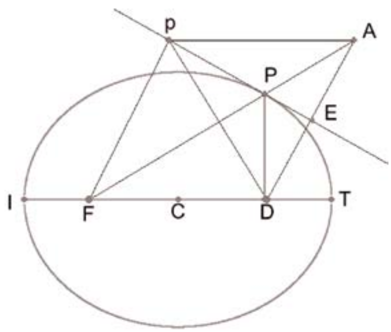



Figura 7

### PROVA

Se $PE$ não tangenciar a elipse no ponto $P$, ela a encontrará outro ponto $p$. Pela definição da elipse, $Fp + pD = FP + PD = FA$. Mas $pD = pA$, pois $pE$ é perpendicular a $AD$ e o divide ao meio. Assim $Fp + pA = FA$. Isto é um absurdo, pois dois lados somados do triângulo $FpA$ não podem ser iguais ao outro lado $FA$. Assim a reta $PE$ tangencia a elipse em $P$. **C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO IX

***Por um ponto qualquer $P$ da elipse possa uma única reta tangente.***

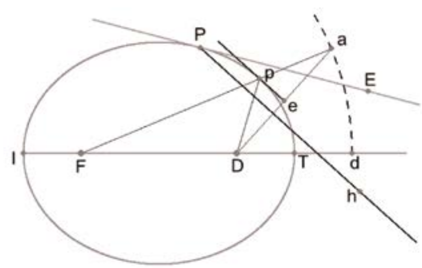



Figura 8

## PROVA

Suponha que seja de outra forma e que a reta *Ph* tangencie a elipse no ponto *P*. Do foco *D*, desenhe *Da* perpendicular a *Ph*. Descreva o círculo *da* com centro *F* e raio $Fd = IT$ encontrando *Da* em *a*. Faça $De = ea$. Construa *Fa* encontrando a elipse em *p*. Desenhe *Dp* e *pe* que será perpendicular a *Da*, pois $Dp = pa$ (definição de elipse). Portanto a reta *pe* tangenciará a elipse (pela proposição ***8***) no ponto *p*, mas *Ph* é também perpendicular a *Da*. Assim *Ph* e *pe* serão paralelas. As tangentes *PE* e *pe* nunca se encontrarão dentro da elipse. A elipse passa pelos pontos *P* e *p*, assim a reta $Ph \,//\, pe$ encontrará necessariamente os segmentos *Fp* e *Dp* dentro da elipse. *Ph*, portanto, passa dentro da elipse e não a tangenciará como foi suposto. Esta reta não poderá ser a tangente *pe*, pois então ela a cortaria em dois pontos *P* e *p*. Logo, existe apenas uma reta tangente à elipse num dado ponto. **C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO X

***Os ângulos FpP e Dpe, feitos pela tangente pe e os segmentos pF e pD traçados do ponto de contato p até os focos, são congruentes.***

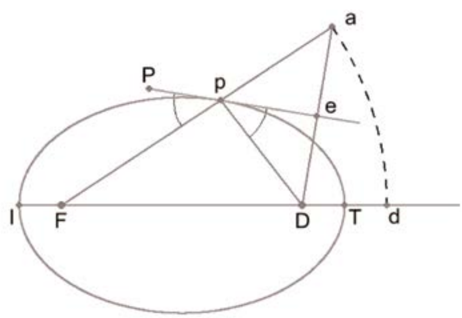



Figura 9

## PROVA

O triângulo *Dpa* é isósceles e *pe* divide ao meio a base. Assim o ângulo $Dpe = ape$. Mas o ângulo $FpP = ape$ (*O. P. V.*). Por transitividade, *FpP* é congruente a *Dpe*.

**C. Q. D.**

## COROLÁRIO

Se o ângulo comum *FpD* for adicionado aos dois ângulos, é evidente que o ângulo *epF* será congruente ao ângulo *DpP*.

# PROPOSIÇÃO XI

***Se a tangente cruza o eixo $IT$ em $H$ e a ordenada, o eixo em $O$, então o semi-eixo maior $CT$ é a média geométrica entre os segmentos que vão do centro $C$ até a interseção do eixo com a ordenada por $P$ e com a tangente que passa por $P$,***

*ou seja,* $\frac{CO}{CT} = \frac{CT}{CH}$

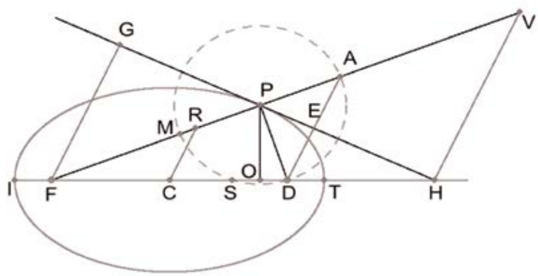



Figura 10

## PROVA

Dos pontos $F$, $C$, $H$, desenhe $FG$, $CR$, e $HV$ paralelas a $DA$. $FA$ será dividida ao meio em $R$, como $FD$ é dividido ao meio em $C$.

Da semelhança de triângulos: $\frac{FP}{AP} = \frac{FG}{AE(=DE)}$ , $\frac{FG}{DE} = \frac{FH}{DH}$ , $\frac{FH}{DH} = \frac{FV}{VA}$ .

Pela propriedade transitiva: $\frac{FP}{AP} = \frac{FV}{VA}$ , Pela proporção: $\frac{\overbrace{FP - PA}^{2RP}}{PA} = \frac{\overbrace{FV - VA}^{FA}}{VA}$

Suas metades: $\frac{2RP}{FA} = \frac{RP}{RA}$ . Assim, $\frac{RP}{PA} = \frac{RA}{VA}$ .

Por composição, $\frac{RP}{(RP + PA) = RA} = \frac{RA}{(RA + VA) = RV}$

Portanto, $\frac{RP}{RA} = \frac{RA}{RV}$ *(1)*. Por potência do ponto F: $\frac{FD}{FA} = \frac{FM}{FS}$ . Suas metades: $\frac{CD}{RA} = \frac{RP}{CO}$

Pelo teorema de Tales: $\frac{CD}{RA} = \frac{CH}{RV}$ . Pela propriedade transitiva, $\frac{CH}{RV} = \frac{RP}{CO}$ *(2)*

De *(1)* e *(2)*: $RA^2 = CH \cdot CO$ . Como $\mathbf{RA} = \mathbf{CT}$, então $CT^2 = CH \cdot CO$

Assim, os segmentos $RP$, $RA$ **e** $RV$ formam uma terceira proporcional:
$RA^2 = RP \times RV$.

### COROLÁRIO

**C. Q. D.**

Vendo os segmentos $CO$, $CT$, $CH$ formarem uma terceira proporcional, pela inversão do método de demonstração do primeiro parágrafo da proposição, será fácil mostrar que $\frac{IO}{OT} = \frac{IH}{HT}$ e por ter encontrado que $\frac{FV}{VA} = \frac{FP}{PA}$ mostra-se que $RP$, $RA$, $RV$ estão em proporção contínua. O segmento $IH$ é dito ser harmonicamente dividido em $O$ e $T$.

## PROPOSIÇÃO XII

***Se a tangente cruza o eixo $NM$ em $V$ e a ordenada, o eixo em $Q$, então o semi-eixo menor $CM$ é a média geométrica entre os segmentos que vão do centro $C$ até a interseção do eixo com a ordenada por $P$ e com a tangente que passa por $P$, ou seja, $\frac{CQ}{CM} = \frac{CM}{CV}$***

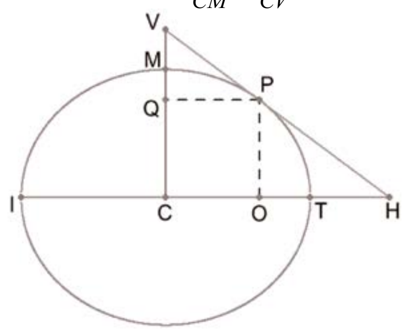



Figura 11

### PROVA

Peloa proposição passada que $\frac{CO^2}{CT^2} = \frac{CO}{CH}$. Pela proposição 4, $\frac{\overbrace{CO^2}^{QP^2}}{CT^2} = \frac{\overbrace{CM^2 - CQ^2}^{NQ \cdot QM}}{CM^2}$

Dos triângulos semelhantes: $\frac{CO}{CH} = \frac{VQ}{CV}$. Pela propriedade transitiva: $\frac{VQ}{CV} = \frac{CM^2 - CQ^2}{CM^2}$

Pela proporção, $\frac{CV}{CV - VQ} = \frac{CM^2}{CM^2 - CM^2 + CQ^2}$ Assim: $\frac{CV}{CQ} = \frac{CM^2}{CQ^2}$ Finalmente $\frac{CV}{CM} = \frac{CM}{CQ}$

**C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO XIII

***Se $BT$ e Rh são tangentes à elipse, entãoos triângulos $PAB$ e $TAH$ são equivalentes.***

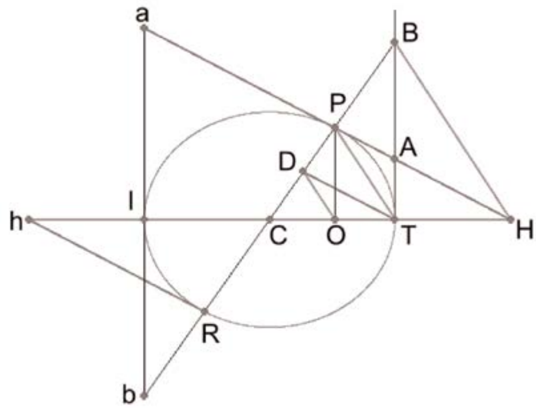



**Figura 12**

PROVA

Do ponto $T$ desenhe $TD$ paralela à tangente $PH$ e $PO$ uma ordenada ao eixo.

Do paralelismo, $\frac{CD}{CP} = \frac{CT}{CH}$. Pela proposição 11, $\frac{CT}{CH} = \frac{CO}{CT}$ e $\frac{CO}{CT} = \frac{CP}{CB}$

Por transitividade $\frac{CD}{CP} = \frac{CP}{CB}$ e, pela mesma razão, $\frac{CD}{CP} = \frac{CO}{CT}$ e $\frac{CP}{CB} = \frac{CT}{CH}$

Portanto os segmentos $DO$, $PT$ e $BH$ serão paralelos uns aos outros e os triângulos $PTB$ e $PTH$, que têm a mesma base $PT$ e mesma altura, serão equivalentes. Do qual surgem o triângulo comum $PAT$ e os restantes $PAB$ e $TAH$ terão a mesma área. **C. Q. D.**

COROLÁRIO 1

Serão também equivalentes: os triângulos $PDT$ e $POT$, os quadriláteros $POTB$ e $PDTH$ (pela adição dos triângulos equivalentes $PTB$ e $PTH$), o quadrilátero $POTB$ e o triângulo $OPH$ (pela adição do triângulo $POT$), o quadrilátero $PDTH$ e o triângulo $DTB$ (pela adição do triângulo $PDT$), o triângulo $CTB$ e o triângulo $CPH$ (pela adição do $PCO$),

COROLÁRIO 2

Desenhe a tangente $Ib$. Pode-se concluir que os triângulos $Pab$ e $IaH$ são equivalentes. Pois $Ib \mathbin{//} BT$. Assim os triângulos $CIb$ e $CTB$ são semelhantes e, como $CI = CT$, são equivalentes também. Portanto os triângulos $CIb$, $CPH$ e $CTB$

serão equivalentes. Finalmente, os triângulos $Pab$ e $IaH$ serão equivalentes, pela adição do quadrilátero $ICPa$.

O que foi demonstrado para triângulos compreendidos entre os segmentos $CT$ e $CP$ pode, da mesma forma, ser demonstrado para aqueles compreendidos entre $CI$ e $CR$. Vamos, a seguir, provar que a tangente $Rh$ deve ser // à tangente $PH$. O triângulo $CPH$ é equivalente ao triângulo $CTB$, que é congruente ao triângulo $CIb$. Pode ser demonstrado, de forma análoga à feita nesta proposição, que o triângulo $CIb$ é equivalente a $CRh$. Assim, o triângulo $CRh$ é equivalente ao triângulo $PCH$. Mas nesses triângulos equivalentes, o ângulo $RCh = PCH$ e $CR = CP$ (pela proposição ***6***), então $Ch = CH$. Assim, esses triângulos são semelhantes. $Rh$, portanto, é paralelo a $PH$ seu lado homólogo.

## LEMA 2

***No triângulo $CTB$ de lado $CT$ prolongado até $I$ com $CI = CT$.***
***De $O$ e $G$ em $CT$, faça $OP$ e $FG$ // $TB$.***
***O retângulo $IOT$ : retângulo $IGT$ :: trapézio $OTBP$ : trapézio $GTBF$.***

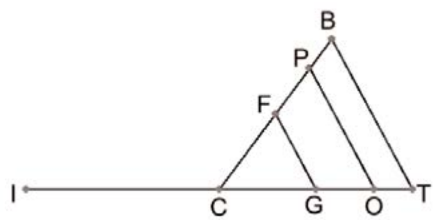



Figura 13

## PROVA

Por semelhança: $\frac{CT^2}{CO^2} = \frac{CT \cdot TB}{CO \cdot OP}$ Pela proporção, $\frac{CT^2 - CO^2}{CT^2} = \frac{CT \cdot TB - CO \cdot OP}{CT \cdot TB}$

Da mesma maneira: $\frac{CT^2}{CG^2} = \frac{CT \cdot TB}{CG \cdot GF}$ Pela proporção, $\frac{CT^2 - CG^2}{CT^2} = \frac{CT \cdot TB - CG \cdot GF}{CT \cdot TB}$

Por trasitividade, $\frac{CT^2 - CO^2}{CT^2 - CG^2} = \frac{(CT \cdot TB - CO \cdot OP)}{(CT \cdot TB - CG \cdot GF)}$

Mas $\boldsymbol{CT^2 - CO^2 = IO \,.\, OT}$ *e* $\boldsymbol{CT^2 - CG^2 = IG \,.\, GT}$

e a quantidade $\boldsymbol{CT \,.\, TB - CO \,.\, OP}$ é igual ao trapézio $\boldsymbol{OTBP}$.

A quantidade $\boldsymbol{CT \,.\, TB - CG \,.\, GF}$ é igual ao trapézio $\boldsymbol{GTBF}$. Assim, $\frac{IO \cdot OT}{IG \cdot GT} = \frac{OTBP}{GTBF}$

**C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO XIV

***Seja um ponto qualquer $E$ da elipse e as retas $LEM$ ($//$ tangente $PH$) e FEG ($//$ à tangente $BT$). O triângulo $EGM$ é equivalente ao quadrilátero $GTBF$.***

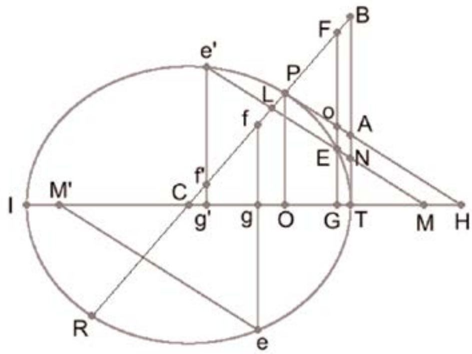



Figura 14

PROVA

Por semelhança de triângulos, $\frac{PO \cdot OH}{EG \cdot GM} = \frac{PO^2}{EG^2}$ . Pela proposição **3,** $\frac{PO^2}{EG^2} = \frac{IO \cdot OT}{IG \cdot GT}$

Como $\mathbf{IC} = \mathbf{CT}$, pelo lema **2**, $\frac{IO \cdot OT}{IG \cdot GT} = \frac{OTBP}{GTBF}$ . Por transitividade, $\frac{PO \cdot OH}{EG \cdot GM} = \frac{OTBP}{GTBF}$

Pelo corolário **1** da proposição ***13***, o triângulo $POH$ é equivalente ao quadrilátero $OTBP$. Portanto, o triângulo $EGM$ é equivalente ao quadrilátero $GTBF$.

**C. Q. D.**

Se o ponto $E$ estivesse em $e$, (figura ***14***), pode ser demonstrado que o triângulo $egM'$ será equivalente ao quadrilátero $gTBf$, uma vez que $eg$ é uma ordenada do eixo.

Se o ponto $g$ cortasse o eixo em algum lugar de $IC$ no outro lado de $C$ (figura ***15***), pode ser demonstrado, da mesma forma, que o triângulo $egM$ é equivalente ao quadrilátero $gIBf$, pois a mesma demonstração serviria para todos, somente considerando o que foi dito no corolário ***2*** da proposição passada.

## PROPOSIÇÃO XV

***O triângulo $ELF$ é equivalente ao quadrilátero $LPHM$.***

PROVA

**1 –** Na figura **14**, O triângulo $CTB$ (pelo cor. ***1*** da prop. ***13***) é equivalente ao triângulo $CPH$ e destes, retira-se o quadrilátero comum $CGEL$. Tirando ainda do primeiro o quadrilátero *GTBF* e do segundo, o triângulo *EGM* (equivalente a *GTBF*, pela proposição precedente), sobram o triângulo *ELF* e o quadrilátero *LPMH* (equivalentes). **C. Q. D.**

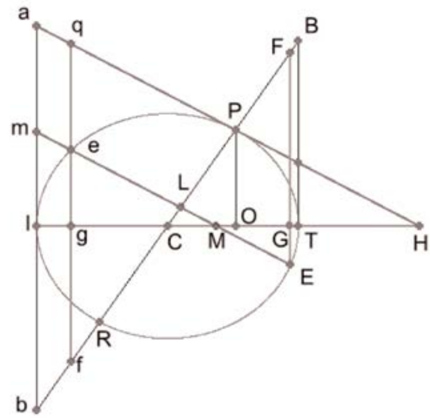



Figura 15

**2 –** Se o ponto ***E*** estiver como em ***e*** no outro de *T* em relação a *P* e o ponto *L* estiver sobre *CP* (figura ***15***). Dos triângulos equivalentes *CTB* e *CPH,* subtraindo o triângulo comum *CML* e do primeiro remanescente, tirando o quadrilátero *GTBF* e adicionando o equivalente triângulo *EGM*, teremos o triângulo *ELF* equivalente a *LPHM*. **C. Q. D.**

**3 –** Se o ponto *E* estiver no outro lado de *P* com relação a *T* como em *e'*, (figura ***14***) e a ordenada *e'g'* sobre *CT,* então o triângulo *e'g'M* é equivalente ao quadrilátero *g'TBf'* (pela proposição ***14***). Destes, retiram-se a figura comum *f'g'GEL*, e ainda o triângulo *EGM* do primeiro, o quadrilátero *GTBF* equivalente a *EGM* do segundo, então sobram *e'f'L = EFL*. Mas o triângulo *EFL*, do que foi demonstrado acima, é equivalente ao quadrilátero *LPHM*. Assim, *e'f'L* é equivalente a *LPHM*. **C. Q. D.**

**4 –** Se no caso precedente o ponto *M* estiver sobre o eixo entre o centro e o vértice (figura ***17***). Dos equivalentes *egM* e *gTBf*, retira-se o quadrilátero comum *fgML*, então sobrarão o triângulo *eLf =* quadrilátero *LMTB,* do qual se *GTBF* for retirado e o triângulo equivalente *EGM* adicionado, o triângulo *ELF* será equivalente ao quadrilátero *LMTB*. Consequentemente os triângulos *eLf*, ***ELF*** e o quadrilátero *LPHM* se equivalem. **C. Q. D.**

**5 –** Se o ponto *g* estiver sobre *IC* (figura ***15***). O triângulo *aPb* é congruente ao triângulo *aIH* (corolário ***1*** da proposição ***13***) e se destes, for retirada a figura *aPLegIa*, e mais do primeiro o quadrilátero *gIbf,* e do segundo o triângulo equivalente *egM* (proposição ***14***), sobra o triângulo *eLf* equivalente ao quadrilátero *LPHM*. **C. Q. D.**

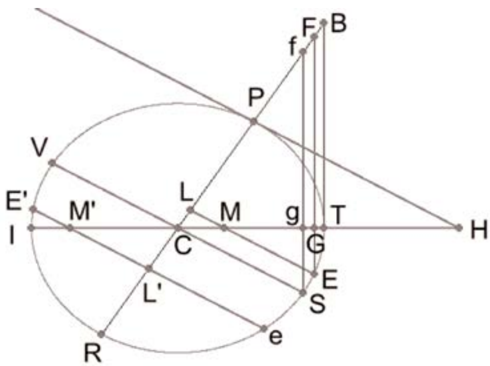



Figura 16

Finalmente, da figura ***16***, para todos os casos onde o ponto ***L*** estiver sobre *CR como L'*, a demonstração será a mesma, uma vez que vale o corolário ***2*** da proposição ***13***). Se o ponto *L* coincidir com *C*, então o ponto *E* estará em *S* ou *V (VCS // PH)* e o triângulo *CfS* será equivalente ao triângulo *CPH*. **C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO XVI

***Na elipse de eixo IT, todas as retas como Ee paralelas à tangente pH, são divididas em duas partes iguais em L, pelo diâmetro RCL.***

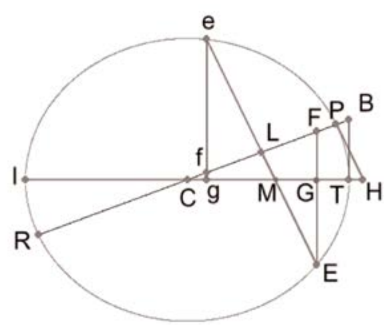



Figura 17

### PROVA

Conforme a proposição anterior, os triângulos *ELF* e *eLf* são equivalentes, pois cada um deles é equivalente ao quadrilátero *LPHM* e eles são semelhantes por causa das paralelas que os compõem. Portanto *EL = eL*. **C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO XVII

Com $EL$ e o diâmetro $VCS$ paralelos à tangente $PH$, então.

$$\frac{VS^2}{RP^2} = \frac{EL^2}{RL \cdot LP}$$

### PROVA

Assim, $\frac{CS^2}{LE^2} = \frac{CSf}{LEF}$ . Por transitividade, $\frac{CS^2}{LE^2} = \frac{CPH}{LPHM}$ .

Pelo lema **2** e como $\boldsymbol{RC} = \boldsymbol{CP}$, $\frac{CPH}{LPHM} = \frac{CP^2}{RL \cdot LP}$ .

Assim, $\frac{CS^2}{LE^2} = \frac{CP^2}{RL \cdot LP}$ Seus quádruplos: $\frac{VS^2}{RP^2} = \frac{LE^2}{RL \cdot LP}$

Pela proposição ***14***, O triângulo $CSf$ é congruente (figura ***16***) ao triângulo $CPH$ e o triângulo $EFL$ é equivalente ao quadrilátero $LPHM$. O triângulo $CSf$ e $EFL$ são semelhantes.

Se o ponto $E$ estiver em $e$, e $L$ estiver em $CR$, prolongue $eL'$ até $E'$ (figura ***16***). Seguindo a mesma idéia, que $L'E'^2$ : retângulo $RL'P$ :: como $VS^2 : RP^2$.

## PROPOSIÇÃO XVIII

***Se a reta*** $Ee$ ***for traçada paralela ao diâmetro*** $RP$***, então*** $Ee$ ***é dividida ao meio em*** $O$ ***pelo diâmetro*** $VS$ ***e*** $\frac{RP^2}{VS^2} = \frac{EO^2}{VO \cdot OS}$ .

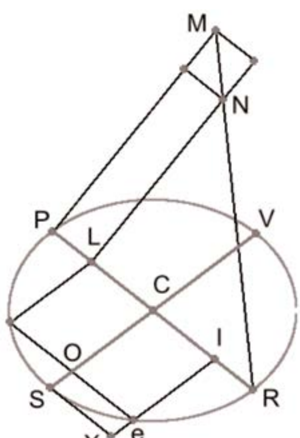



**Figura 18**

## PROVA

1 – Ao traçar EL e el // VS (pela proposição passada), $\frac{EL^2}{el^2} = \frac{RL \cdot LP}{Rl \cdot lP}$

Como $EL = el$, então o retângulo $RLP =$ retângulo $RlP$ e consequentemente os segmentos $CL$ e $Cl$ são iguais, como também $EO$ e $eO$ que são iguais a elas.

2 - Pela proposição passada, $\frac{CP^2}{CS^2} = \frac{\overbrace{CP^2 - CL^2}^{RL \cdot LP}}{LE^2}$ .

Pela propriedade de proporção, $\frac{CP^2}{CP^2 - CP^2 + CL^2} = \frac{CS^2}{\underbrace{CS^2 - LE^2}_{VO \cdot OS}}$

Seus quádruplos $\frac{RP^2}{VS^2} = \frac{EO^2}{VO \cdot OS}$

## COROLÁRIO

A reta $SX$ (// $OE$) tangencia a elipse no ponto $S$, o que é o contrário das proposições passadas.

## DEFINIÇÕES

11. Os diâmetros $RP$ e $VS$, cujas propriedades estão demonstradas nas duas proposições anteriores, são chamados ***Conjugados*** um do outro.
12. O segmento $EL$ paralelo a um dos diâmetros conjugados $VS$, é chamado **Ordenada** ao outro diâmetro $RP$ e reciprocamente EO é uma ***Ordenada*** de $VS$.
13. Se você faz $RP : VS :: VS : PM$. Esta terceira proporcional $PM$ é chamada de ***Parâmetro*** do diâmetro $RP$. Seguindo da mesma maneira para o diâmetro $VS$, conclui-se que os dois diâmetros conjugados são os meios proporcionais entre seus parâmetros.
14. O retângulo $RPM$, de lados o diâmetro $RP$ e seu parâmetro $PM$, é chamado a ***Figura*** do diâmetro $RP$.

## PROPOSIÇÃO XIX

***O quadrado da ordenada*** $EL$ ***do diâmetro*** $RP$ ***é igual ao retângulo*** $PN$***. Ele é a diferença entre o retângulo*** $LM$ ***e o retângulo*** $NM$
***(que é semelhante à figura*** $RM$***), ou seja,*** $EL^2 = NL \,.\, LP$

## PROVA

Na figura **18**, usando a proposição **17**, $\frac{RP^2}{VS^2} = \frac{RL \cdot LP}{EL^2}$ .

Pela proposição **18**, $\frac{RP^2}{VS^2} = \frac{RP}{PM}$

Por semelhança de triângulos, $\frac{RP}{PM} = \frac{RL}{LN}$ . Como $\frac{RL \cdot LP}{NL \cdot LP} = \frac{RL}{NL}$ .

Por propriedade transitiva: $\frac{RL \cdot LP}{EL^2} = \frac{RL \cdot LP}{NL \cdot LP}$ . Portanto, $\boldsymbol{EL^2 = NL \,.\, LP}$

## PROPOSIÇÃO XX

***Na elipse $ADBE$, sejam duas retas $HI$ e $FG$ paralelas a dois diâmetros conjugados $AB$ e $DE$, se encontrando em $R$, um ponto que não esteja na elipse; então, $\frac{HR \cdot RI}{FR \cdot RG} = \frac{AB^2}{DE^2}$***

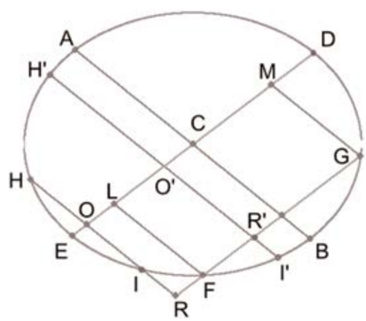



Figura 19

## PROVA

Sendo FL e GM ordenadas do diâmetro ED. Pela proposição **17**, $\frac{LF^2}{OI^2} = \frac{EL \cdot LD}{EO \cdot OD}$

Se R estiver fora da elipse, pela prop. da proporção: $\frac{\overbrace{LF^2 - OI^2}^{HR \cdot RI}}{OI^2} = \frac{\overbrace{EL \cdot LD - EO \cdot OD}^{FR \cdot RG}}{EO \cdot OD}$

Se R estiver dentro da elipse, pela prop. da proporção: $\frac{\overbrace{OI^2 - LF^2}^{HR \cdot RI}}{OI^2} = \frac{\overbrace{EO \cdot OD - EL \cdot LD}^{FR \cdot RG}}{EO \cdot OD}$

Pela proposição **17**, $\frac{OI^2}{EO \cdot OD} = \frac{AB^2}{DE^2}$ . Por transitividade, $\frac{HR \cdot RI}{FR \cdot RG} = \frac{AB^2}{DE^2}$ .

# PARTE 3 – A HIPÉRBOLE

## A OBTENÇÃO DA HIPÉRBOLE

Se sobre um plano for traçado um segmento $IT$ dividido ao meio em $C$ e os pontos $F$ e $D$ forem tomados com iguais distâncias de $C$ nos prolongamentos do mesmo segmento. Então você pode encontrar tantos pontos $P$ e $p$ quantos você queira, de tal forma que o segmento $PF – PD = IT$ ou $pD – pF = IT$.

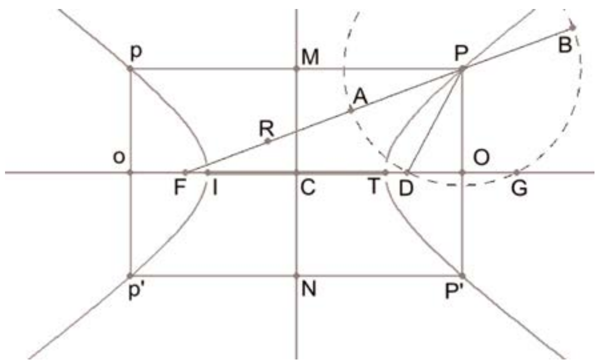



Figura 1

## A CONSTRUÇÃO DA HIPÉRBOLE

Tome $FP$ qualquer tão grande quanto você queira, desde que ele não seja menor que $FT$. Então $FP – IT \geq DT$. Assim se o ponto $F$ for feito como centro do círculo com raio $FP$ e $D$ o centro de outro círculo com raio $DP$, estes dois círculos irão necessariamente interceptar-se em dois pontos $P$ *e* $P'$ (ou $p$ e $p'$**)**, em lados opostos de $IT$. Ou, pelo menos, tangenciarão um ao outro no ponto $T$, no caso de $P$ e $T$ coincidirem, pois $FT$ e $DT$ serão os raios. Desta forma, você poderá achar tantos pontos $P$ quantos desejar.

## COROLÁRIO

O segmento que une os pontos $P$ e $P'$, as interseções dos dois círculos, será perpendicular a reta $FD$ e dividido ao meio por ela. Assim, os pontos $P$ e $P'$ formarão um ramo da curva, que passará por $T$, enquanto outro ramo passará pelos outros pontos $p$ e $p'$, que passará por $I$. As curvas $PTP'$ e $pIp'$ não são fechadas. Elas se estendem infinitamente e se afastam continuamente da reta $IT$, uma de um lado de $NCM$ e a outra no outro.

## DEFINIÇÕES

1. A curva que passa por *PTP'* e *pIp'* é denominada ***"Hipérbole"***.
2. O ponto *C* é chamado ***"Centro"*** da hipérbole.
3. O segmento *IT* é chamado ***"Eixo Determinado"***.
4. A reta *NCM* perpendicular a *IT* e que passa por *C* é chamada ***"Eixo Indeterminado"***.
5. Os pontos *F* e *D* são chamados ***"Focos"***.
6. Os segmentos *PO*, traçadas dos pontos da hipérbole até o eixo e perpendiculares a ele, são denominadas ***"Ordenadas"*** desse eixo.

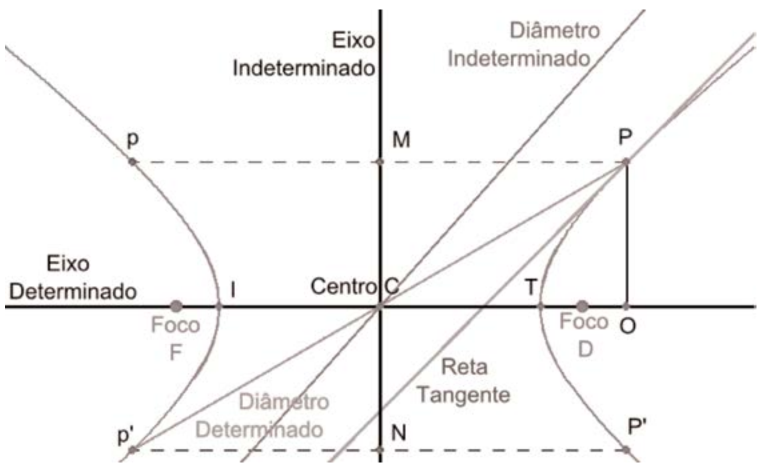



Figura 2

7. Todas as retas que passam através do centro *C* são chamadas ***"Diâmetros"***, os que encontram a hipérbole são os ***"Determinados"*** e os que não, são os ***"Indeterminados"***.
8. A hipérbole divide o plano em três regiões. Será chamada de ***"Interior"*** de uma hipérbole às regiões que contêm os focos e, de ***"Exterior"*** de hipérbole, a região restante.
9. Uma reta que encontra a hipérbole em apenas um ponto e que não passa no seu interior é chamada ***"Tangente"*** da hipérbole nesse ponto.

# PROPOSIÇÃO I

*Numa hipérbole, o quadrado de $PO$ (uma ordenada do eixo determinado $IT$) : retângulo $IOT$ :: retângulo $IFT$ (ou seu igual $TDI$) : retângulo $ICT$ ($CT^2$):*

$$\frac{PO^2}{IO \cdot OT} = \frac{ID \cdot DT}{CT^2}$$

## PROVA

Na figura 1, desenhe $FP$ e prolongue-a até $B$, de tal forma que $PB = PD$.
Do ponto $P$ como um centro e com o raio $PD$, descreva o círculo $BGD$, encontrando $FP$ em $A$ e $IT$ em $D$ e $G$. $FA = IT$ pela definição de hipérbole e $FR = RA$. Por potência do ponto $F$ no círculo $BGD$, $FA \,.\, FB = FD \,.\, FG$.
Assim $FA : FD :: FG : FB$ e conseqüentemente suas metades $\frac{CT}{CD} = \frac{CO}{RP}$ .
Por ser proporção, $\frac{CT}{CT + CD} = \frac{CO}{CO + RP}$ e alternando $\frac{CT}{CO} = \frac{CT + CD}{CO + RP}$.
Compondo novamente . $\dfrac{CT}{\underbrace{CT + CO}_{IO}} = \dfrac{\overbrace{CT + CD}^{ID}}{\underbrace{CT + CD}_{ID} + CO + RP}$
Mas $CT + CD + CO + RP = FR + FC + CO + RP = FP + FO$. Assim $\frac{CT}{IO} = \frac{ID}{FP + FO}$.
Retomando a proposição $\frac{CT}{CD} = \frac{CO}{RP}$ . Por ser proporção, $\frac{CT}{CD - CT} = \frac{CO}{RP - CO}$

e alternando $\frac{CT}{CO} = \frac{CD - CT}{RP - CO}$ . Novamente, $\dfrac{CT}{\underbrace{CO - CT}_{OT}} = \dfrac{\overbrace{CD - CT}^{DT}}{RP - CO - CD + CT}$ .
Mas $RP - CO - CD + CT = RP - CO - FC + FR = FP - FO$. Assim $\frac{CT}{OT} = \frac{DT}{FP - FO}$ .
Multiplicando as últimas proporções dos dois parágrafos precedentes, teremos $CT^2$ : retângulo $IOT$ :: retângulo $IDT$ : retângulo $(FP + FO) \times (FP - FO) = PO^2$ (pelo lema da proposição 1 de elipse).

Se o círculo $BGD$ tangenciar $IT$ em $D$, isto é, se o ponto $O$ coincidir com $D$, a demonstração será a mesma, mas ainda mais simples, pois significa que quantidades diferentes tornar-se-iam iguais.

## COROLÁRIO

Os quadrados das ordenadas do eixo estão um para o outro como os retângulos formados pelas partes deste eixo entre suas extremidades e suas interseções com as ordenadas.

## PROPOSIÇÃO II

*O segmento $Pp$ traçado entre os ramos da hipérbole, paralelo ao eixo determinado $IT$, encontra o eixo indeterminado $NM$ em um ponto $M$ e $PM = Mp$.*

### PROVA

Se o ponto $D$ for feito o centro de um círculo com raio $FP$ (Figura **1**) e $F$ o centro de outro círculo com raio $DP$, então os dois círculos se interceptarão nos pontos $p$ e $p'$. Os triângulos $FDP$ e $FDp$ são congruentes ($LLL$). Logo suas alturas $po$ e $PO$ serão iguais, assim como $DO$ e $Fo$. Logo, $CO = Co$ e, pelo paralelismo, $pM = PM$.

**C. Q. D.**

### DEFINIÇÕES

10. O segmento $TV = 4 \,.\, ID \,.\, DT / IT$, é chamado o ***"Parâmetro"*** do eixo $IT$.

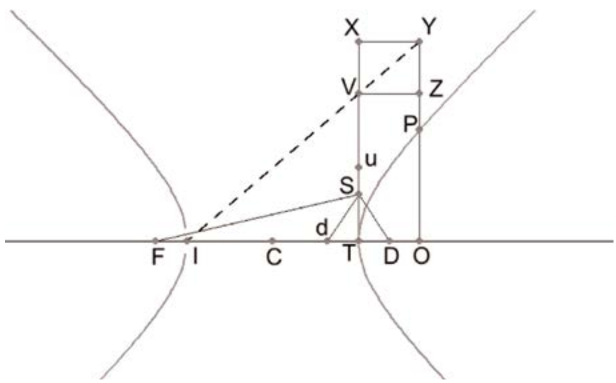



Figura 3

11. O retângulo $IV$, formado por $IT$ e seu parâmetro $TV$, é chamado ***"Figura"*** do eixo $IT$.

### COROLÁRIO

Pelas definições ***10*** e ***11***, a figura $IV$ é igual a 4 vezes o retângulo $IDT$.

## PROPOSIÇÃO III

*O quadrado de $PO$ é equivalente ao retângulo $OTXY$. Este é equivalente à soma do retângulo $TOZV$ e do retângulo $VZYX$ que é semelhante à figura de $IT$ (Figura **3**).*

PROVA

Pela prop. I, $\frac{CT^2}{ID \cdot DT} = \frac{IO \cdot OT}{PO^2}$. Pela cor. da prop. II, $\frac{CT^2}{ID \cdot DT} = \frac{IT^2}{IT \cdot TV} = \frac{IT}{TV}$ .

Por transitividade $\frac{IT}{TV} = \frac{IO \cdot OT}{PO^2}$ . Por semelhança, $\frac{IT}{TV} = \frac{IO}{YO} = \frac{IO \cdot OT}{YO \cdot OT}$

Assim, por transitividade, $YO.OT = PO^2$ **C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO IV

*Se pelo ponto $P$ de um dos ramos da hipérbole for desenhado o diâmetro $PC$, e prolongado além de $C$, ele encontrará o outro ramo da hipérbole em $p'$ e $PC = Cp'$.*

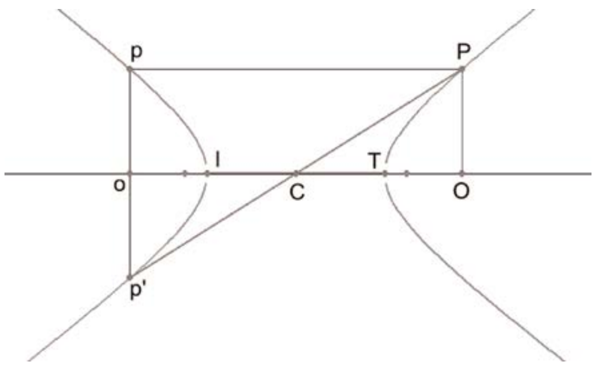



Figura 4

PROVA

Desenhe $PO$ uma ordenada do eixo $IT$ e faça $CO = Co$. Desenhe igualmente as ordenadas $po$ e $op'$ em cada lado do eixo. Pela demonstração da proposição $II$, $p'o = PO$. Logo, os triângulos $Cop'$ e $COP$ serão congruentes ($LAL$). Assim, $p'P$ passará pelo centro e conterá $PC$ e $Cp' = PC$. **C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO V

***Uma reta $XT$ (perpendicular ao eixo por $T$) tangencia a hipérbole neste ponto.***

PROVA

Na figura ***3***, suponha que $XT$ não tangencie a hipérbole, mas a encontre também em outro ponto $S$, que é diferente de $T$. Tome $Td = TD$, então $Fd = IT$

e $Sd = SD$. Pela geração da hipérbole, $IT + SD$ (ou seus iguais $Fd + Sd$) são iguais a ***FS***. Isto é, o lado $Sd$ do triângulo $FSd$ é igual a $Fd + dS$, o que é um absurdo. Portanto a perpendicular $XT$ encontra a hipérbole exclusivamente no ponto $T$. A reta $XT$ não pode passar no interior da hipérbole, pois é evidente (da geração) que a hipérbole se afasta mais e mais do eixo indeterminado, que é paralelo a $XT$. Portanto $XT$ tangencia a hipérbole em $T$. **C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO VI

***Na figura 1, desenhe $DA$. A sua reta mediatriz $PE$ tangenciará a hipérbole no ponto $P$.***

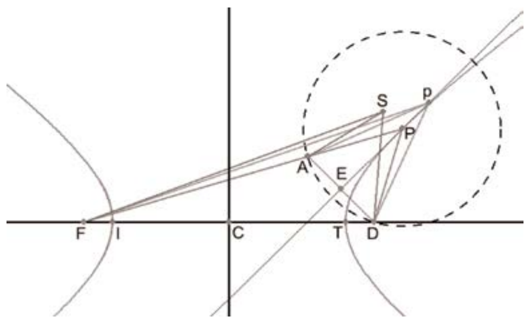



Figura 5

### PROVA

***1 –*** Suponha que seja de outra forma e que $PE$ encontre a hipérbole em qualquer outro ponto $p$. Pela geração da hipérbole, $Fp – pD = FP – PD = FA$. Sendo $PE$ perpendicular a $AD$ $(DE = EA)$ então, $pA = pD$. Logo, $Fp – pA = FA$, o que é um absurdo.

***2 –*** Se a reta $EP$ prolongada além de $P$ estiver no interior da hipérbole, é visível que a hipérbole passará no outro lado de $EP$, com relação ao eixo $IT$. Portanto desenhe, de qualquer ponto $S$ da hipérbole, os segmentos $SF$ e $SD$ até os focos. Pela geração, o segmento $IT$ $(= FA)$ $+ SD = SF$. Estando o ponto $S$ do outro lado da reta $EP$ com relação ao ponto $D$, então, $SA < SD$. Somando $FA$ $(= IT)$ dos dois lados: $SA + FA < SF$**,** o que é um absurdo, pela desigualdade triangular.

**C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO VII

*Se a reta $PE$ tangencia a hipérbole no ponto $P$, então o ângulo $FPE = DPE$.*

PROVA

Sendo $P$ o centro e $PD$ o raio (Figura ***5***), descreva o círculo $DA$. O triângulo $DPA$ (pela proposição ***VI***) é isósceles e $AE = ED$. Assim o ângulo $DPE = FPE$. **C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO VIII

***Existe apenas uma reta $PH$ que tangencia a hipérbole no ponto $P$.***

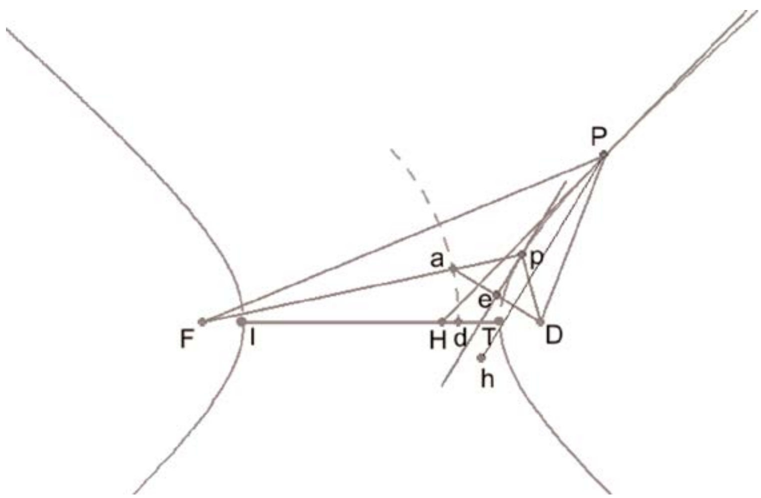



Figura 6

PROVA

Suponha que $Ph$ também tangencie a hipérbole no ponto $P$. Desenhe $Da$ perpendicular a $Ph$ e o círculo $da$ com centro $F$ e com raio $Fd = IT$ que encontrará $Da$ em $a$. Bissecte $Da$ em $e$. Prolongue $Fa$ até encontrar a reta perpendicular a $Da$ por $e$ no ponto $p$ da hipérbole (prop. ***VI***) e trace $pD$**.** Pela definição de hipérbole, $pD$ e $ap$ serão iguais. Portanto, a reta $pe$ será paralela a $Ph$. Ela tangencia a hipérbole em $p$ (pela proposição ***VI***), portanto $pe$ encontrará a reta tangente à hipérbole no ponto $T$, em algum ponto fora da hipérbole, uma vez que são ambas tangentes. Assim sua paralela $Ph$ passa no interior da hipérbole, pois a hipérbole vai de $P$ até $p$ e a ordenada do ponto $p$ encontra $Ph$ no interior da hipérbole. Isto é um absurdo, pois $Ph$ foi assumida tangente. Portanto só pode ser traçada uma única reta $PH$, que tangenciará a hipérbole por $P$. **C. Q. D.**

## DEFINIÇÃO

12. Seja a reta $aTA$ perpendicular ao eixo $IT$ por $T$ e $TA^2 = ID . DT$. Faça $Ta = TA$. Desenhe as retas $AC$ e $aC$. Estas retas são chamadas ***"Assíntotas"*** da hipérbole.

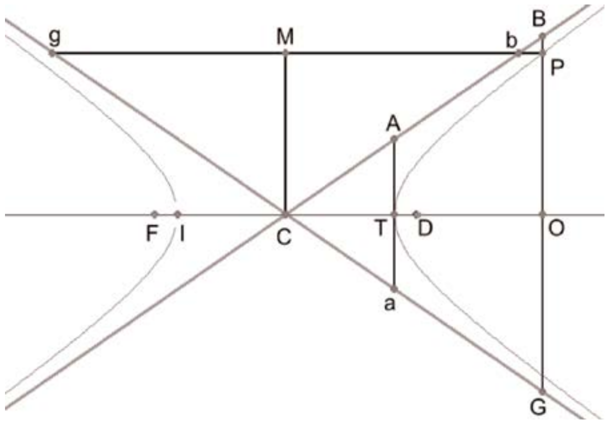



Figura 7

## COROLÁRIO

As assíntotas de um ramo da hipérbole são também assíntotas do ramo oposto.

## PROPOSIÇÃO IX

***Na fig. 7, se a ordenada $OP$ for prolongada até $B$ e $G$, então $GP . PB = TA^2$.***

## PROVA

Sendo $TA // OB$, por semelhança, $\frac{CT^2}{TA^2} = \frac{CO^2}{OB^2}$

Pela proposição **I** e pela definição de assíntota, $\frac{CT^2}{TA^2} = \frac{(CO^2 - CT^2) = IO \cdot OT}{OP^2}$.

Por transitividade, $\frac{CO^2 - CT^2}{OP^2} = \frac{CO^2}{OB^2}$ e alternando, $\frac{CO^2}{CO^2 - CT^2} = \frac{OB^2}{OP^2}$

Por ser proporção, $\frac{CO^2}{CO^2 - CO^2 + CT^2} = \frac{OB^2}{OB^2 - OP^2}$ .

Alternando, $\frac{CO^2}{OB^2} = \frac{CT^2}{(OB^2 - OP^2) = GP \cdot PB}$

Como na primeira proporção , $\frac{CT^2}{TA^2} = \frac{CO^2}{OB^2}$ então $GP . PB = TA^2$. **C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO X

***Na figura 7, pelo ponto $P$ da hipérbole traça-se uma reta $Pg \,//\, IT$.***
***Logo, $gP \,.\, Pb = CT^2$.***

PROVA

Na Figura **7**, $bM = Mg$ (congruência dos triângulos e assíntota).

Da semelhança, $\dfrac{OB^2}{CM^2 = PO^2} = \dfrac{CO^2 = MP^2}{Mb^2}$.

Sendo proporção, $\dfrac{OB^2}{OB^2 - PO^2} = \dfrac{MP^2}{MP^2 - Mb^2}$.

Alternando, $\dfrac{(OB^2 - PO^2) = GP \cdot PB}{(MP^2 - Mb^2) = gP \cdot Pb} = \dfrac{OB^2}{MP^2 = CO^2}$.

Por semelhança, $\dfrac{OB^2}{CO^2} = \dfrac{TA^2}{CT^2}$. Por transitividade, $\dfrac{GP \cdot PB}{gP \cdot Pb} = \dfrac{TA^2}{CT^2}$.

Da prop. **9**, $GP \,.\, PB = TA^2$. Assim $gP \,.\, Pb = CT^2$. **C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO XI

*A hipérbole e suas assíntotas se aproximam continuamente uma da outra quanto mais ambas sejam prolongadas e nunca se encontrarão, pois a parte **PB** da ordenada contida entre a hipérbole e sua assíntota pode ser feita menor que qualquer linha dada.*

PROVA

Pela proposição ***9***, o retângulo $GPB$ é equivalente a $TA^2$ (Figura ***7***). Mas o segmento $GB$ aumenta quanto mais ele se distancia de $C$. Assim $PB$ continuamente diminui, mas não pode nunca ser nulo, pois para tanto a área do retângulo $GPB$ seria nula, o que contradiria a proposição mencionada. Assim, a hipérbole e a assíntota nunca se encontram.

Então se um retângulo for feito, onde um dos lados será menor que qualquer linha dada, tal retângulo terá área igual à do quadrado de lado $TA$. A soma dos dois lados deste retângulo como $GB$, sendo aplicado perpendicularmente ao eixo $IT$ no interior do ângulo feito pelas assíntotas. O ponto $P$ que divide os lados do retângulo estará no interior da hipérbole (pela proposição ***XI***) e assim $PB$ é menor que uma linha dada. **C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO XII

***Sejam dois segmentos*** $PH // AD$ ***limitados pela assíntota*** $CD$
***e outros dois segmentos*** $PF // AB$***, limitados pela outra assíntota*** $CB$***.***
***Então,*** $PH \times PF = AD \times AB$***.***

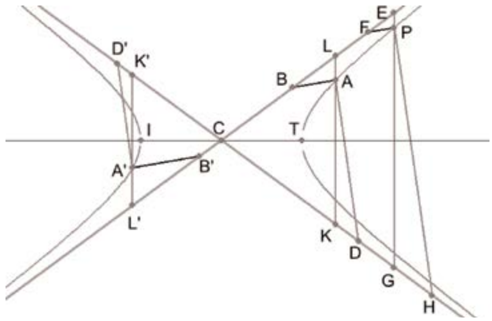



**Figura 8**

PROVA

Desenhe os segmentos $EPG$ e $LAK$ perpendiculares ao eixo determinado.
Os triângulos $EPF$ e $LAB$ são semelhantes, assim como $PGH$ e $AKD$, pois os segmentos que os compõem são paralelos.

Assim $\frac{EP}{PF} = \frac{LA}{AB}$ e $\frac{PG}{PH} = \frac{AK}{AD}$ . Multiplicando essas duas proporções, surgirá a proporção $\frac{EP \cdot PG}{PF \cdot PH} = \frac{LA \cdot AK}{AB \cdot AD}$ . Pela proposição IX, o retângulo $EPG$ é equivalente ao retângulo $LAK$, pois eles são iguais aos quadrados do mesmo lado. Assim, $PF \,.\, PH = AB \,.\, AD$.

**C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO XIII

***Desenhe uma reta*** $PA$ ***encontrando um mesmo ramo da hipérbole e as assíntotas em*** $F$ ***e*** $H$***. Então*** $PF = AH$***.***

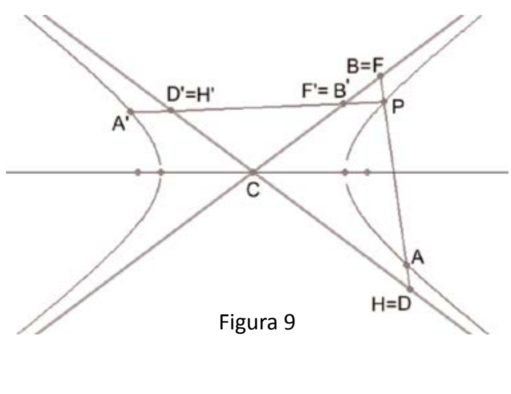



Figura 9

## PROVA

Pela proposição ***XII***, $PH \cdot PF = AD \cdot AB$. Faça o segmento $PH$ colinear com o segmento $PF$ e escolha o ponto $A$ na outra interseção de $PH$ com a hipérbole. Os pontos $H$ e $D$ coincidirão, assim como $F$ e $B$. Então teremos $PD \,.\, PF = AD \,.\, AF$. Assim, os segmentos $PF$ e $AF$, como também $PD$ e $AD$ são colineares, pertencendo a uma mesma reta. Logo, $PF \,.\, (PA + AD) = AD \,.\, (PA + PF)$. Assim, $PF = AD$. **C. Q. D.**

Se $A$ estiver no outro ramo como em $A'$, tudo que foi usado continua valendo.

## PROPOSIÇÃO XIV

***Uma reta tangente** $FPH$ **sempre corta as assíntotas em** $F$ **e** $H$ **e** $FP = PH$.*

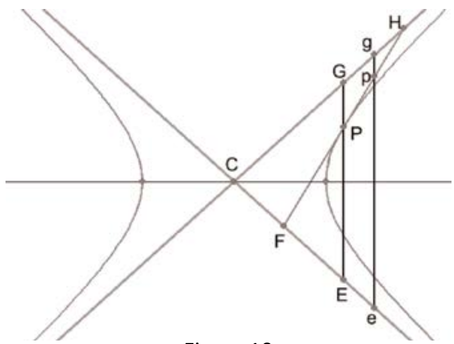



Figura 10

## PROVA

**1 –** Desenhe $EPG$ o dobro da ordenada por $P$. Se a tangente em $P$ não encontrar as assíntotas, então ela será paralela a uma delas (que poderá ser $CG$) se for possível. Pela proposição ***XI***, pode-se encontrar um segmento paralelo e menor que $PG$, que esteja compreendido entre a hipérbole e a assíntota. Este segmento (Figura ***10***) prolongado necessariamente encontrará a tangente $FPH$ no interior da hipérbole. Isto é absurdo, pois $FPH$ foi admitida ser uma tangente. Portanto, a tangente encontra ambas as assíntotas.

**2 –** Assuma $PH > PF$. Faça $Hp = FP$ e desenhe $epg \,//\, EPG$. Pela semelhança de triângulos:

$\frac{pg}{PG} = \frac{Hp}{HP}$ e $\frac{Hp}{HP}$ ou seus iguais $\frac{FP}{Fp} = \frac{PE}{pe}$ . pela prop. transitiva, $\frac{pg}{PG} = \frac{PE}{pe}$

Assim, $PG \,.\, PE = pg \,.\, pe$. Pela recíproca da proposição ***IX***, o ponto $p$ será um ponto da hipérbole. Portanto, $FPH$ encontrará a hipérbole em dois pontos $P$ e $p$, contrariando a hipótese, pois ele foi assumida ser tangente. Logo, $PH = PF$.

**C. Q. D.**

# PROPOSIÇÃO XV

***Desenhe os segmentos** $FH // BD // B'D'$. **Se o segmento** $B'D'$ **tangenciar a hipérbole no ponto** $A'$, **então** $PF \times PH = AB \times AD = A'B'^2$*

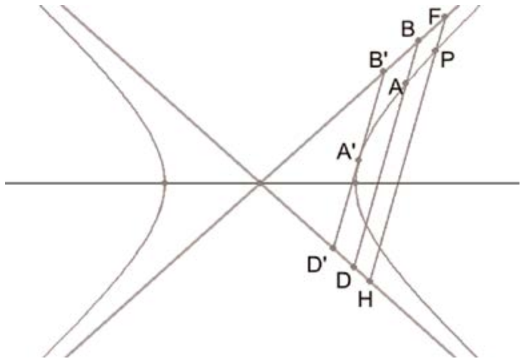



Figura 11

PROVA

Pela proposição ***XII***, como os segmentos $PF$ e $PH$ são paralelos, assim como $AB$ e $AD$ entre si, então $PF \times PH = AB \times AD$. Se $B'D'$ for a tangente no ponto $A'$, então $B'A' = A'D'$ (pela proposição ***14***). Portanto, $PF \times PH = AB \times AD = A'B'^2$

**C. Q. D.**

# PROPOSIÇÃO XVI

***Seja uma reta** $PH // CA$, **então PH corta as assíntotas em** $F$ **e** $H$ **e** $PF . PH = CA^2$.*

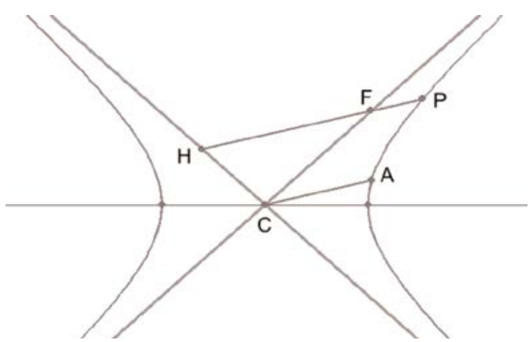



Figura 12

PROVA

Como $CA$ é interior ao ângulo feito pelas assíntotas, então o segmento $PH$ // $CA$, deve encontrar as assíntotas em $F$ e $H$. Os segmentos $AC$ e $PF$ são paralelos e encontram a assíntota $CF$, como também os segmentos $AC$ e $PH$ paralelos que encontram a outra assíntota $CH$. Pela proposição ***XII***, $AC \,.\, AC = AC^2 = PF \,.\, PH$.

**C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO XVII

***Sejam os segmentos $PF$ // $AB$ e $PH$ // $AD$ paralelos às suas assíntotas. O paralelogramo $PFCH$ é equivalente ao paralelogramo $ABCD$.***

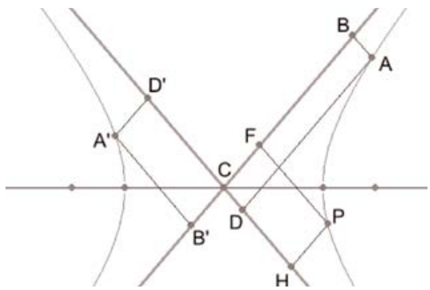



Figura 13

PROVA

Pela proposição ***XII***, $PF \cdot PH = AB \cdot AD$. Alternando, $\frac{PH}{AD} = \frac{AB}{PF}$. Como o ângulo $FPH = BAD$, então os paralelogramos $CP$ e $CA$ são equivalentes. **C. Q. D.**

Se $A$ estiver no outro ramo como em $A'$, tudo que foi usado continua valendo e $CP$ ***e*** $CA'$ serão equivalentes.

## PROPOSIÇÃO XVIII

***Sendo $KI$ e $EG$ tangentes à hipérbole, os triângulos $KCI$ e $EGC$ são equivalentes.***

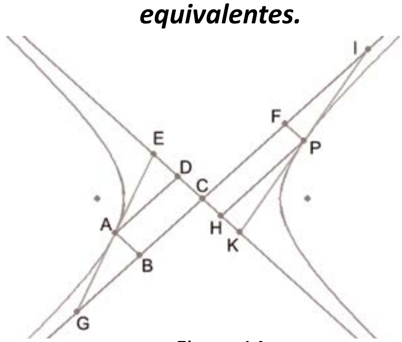



Figura 14

## PROVA

Desenhe $AB$ e $FP$ paralelas a uma assíntota e $AD$ e $PH$, paralelas à outra. Pela proposição ***XVII***, os paralelogramos $CA$ e $CP$ são equivalentes. Como as tangentes são divididas ao meio pelos pontos de contato (pela proposição ***XIV***), então a área do paralelogramo $CP$ será **½** da área do triângulo $CIK$ e o paralelogramo $CA$ será **½** do triângulo $EGC$. Assim os triângulos são equivalentes. **C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO XIX

***Seja a tangente*** $BTA$ // $PE$ // $LI$***. O diâmetro*** $OCT$ ***dividirá ao meio*** $PE$ ***e*** $LI$ ***em*** $N$ ***e*** $H$, ***respectivamente. Ou seja,*** $PN=NE$ ***e*** $LH=HI$.

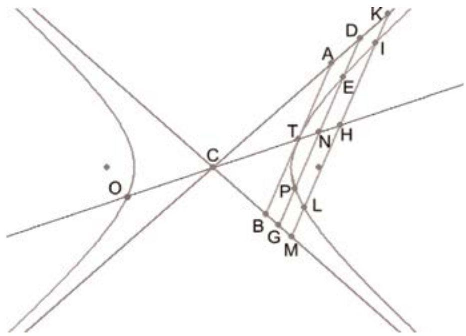



Figura 15

## PROVA

A tangente $BA$ é dividida ao meio em $T$ (pela proposição ***XIV***). Se os segmentos $PE$ e $LI$ forem prolongados até as assíntotas em $G$, $D$, $M$, $K$, então $GD$ e $MK$ serão também divididos ao meio nos pontos $N$ e $H$ pelo diâmetro $CT$ (semelhança de triângulos). Como $GP = ED$ e $ML = IK$ (pela proposição ***XIII***), então $PN = NE$ e $LH = HI$. **C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO XX

***Sejam a tangente $AB$, o diâmetro $XCR \,//\, AB$ e outro diâmetro $OCT$. Todo segmento como $PV$ ($pv$) // diâmetro $OT$, é dividido ao meio em $R$ ($r$) pelo diâmetro $XCR$. Então, $PR = RV$***

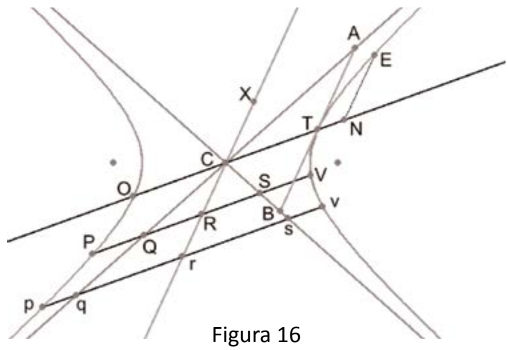



Figura 16

PROVA

Como $AB \,//\, XC$ e $AT = TB$, deduz-se que os segmentos $QS$ e $qs$, serão igualmente divididos ao meio em $R$ e $r$ (semelhança de triângulos). Como $PQ = SV$ e $pq = sv$ (proposição ***13***), então $PR = RV$ e $pr = rv$. **C. Q. D.**

DEFINIÇÕES

13. Os diâmetros $OT$ e $XR$ cujas propriedades foram demonstradas nas duas últimas proposições são chamados ***"Conjugados"*** (figuras 15 e 16) um do outro.
14. Um segmento $EN \,//\, XC$ é chamado ***"Ordenada"*** do diâmetro $OT$ e reciprocamente $VR$ é uma ***"Ordenada"*** do diâmetro $XC$.

## PROPOSIÇÃO XXI

Sendo EN uma ordenada de $OT$, então $\dfrac{EN^2}{ON \cdot TN} = \dfrac{AT^2}{CT^2}$ (Figura 15).

PROVA

Triângulos semelhantes: $\dfrac{DN^2}{TA^2} = \dfrac{CN^2}{CT^2}$. Por ser proporção, $\dfrac{DN^2 - TA^2}{TA^2} = \dfrac{CN^2 - CT^2}{CT^2}$

Como $CN^2 - CT^2 = ON \,.\, TN$ (diferença de quadrados)

e $DN^2 - TA^2 = EN^2$ (Pela proposição 15), então $\dfrac{EN^2}{ON \cdot TN} = \dfrac{AT^2}{CT^2}$

**C. Q. D.**

## COROLÁRIO

É evidente que: $\frac{EN^2}{IH^2} = \frac{ON \cdot TN}{OH \cdot TH}$

## DEFINIÇÕES

15. Assuma que $CT$ está para $TA$ assim como $TA$ está para metade de $TP$. O segmento $TP$ é chamado o ***"Parâmetro"*** do diâmetro determinado $OT$.

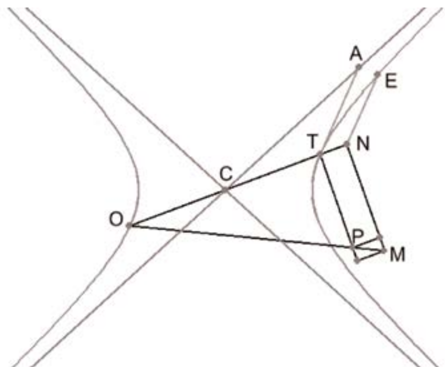



Figura 17

16. O retângulo OP, de lados o diâmetro OT e seu parâmetro TP, é chamado ***"Figura"*** do diâmetro OT.

## PROPOSIÇÃO XXII

***O quadrado da ordenada $EN$ é equivalente ao retângulo $TM$. Sua área é a soma das áreas dos retângulos $PN$ (de lados $TP$ e $TN$) e $PM$ (que é semelhante à figura $OP$), ou seja,*** $EN^2 = MN \cdot TN$

## PROVA

Na figura 17, pela definição de parâmetro do diâmetro, $\frac{OT}{TP} = \frac{CT^2}{TA^2}$

Pela proposição XXI, $\frac{CT^2}{TA^2} = \frac{ON \cdot TN}{EN^2}$. Tem-se que $\frac{ON \cdot TN}{MN \cdot TN} = \frac{ON}{MN}$.

Por semelhança, $\frac{ON}{MN} = \frac{OT}{TP}$. Pela propriedade transitiva, $\frac{ON \cdot TN}{NE^2} = \frac{ON \cdot TN}{MN \cdot TN}$.

Assim o retângulo $MN \cdot TN$ é equivalente ao quadrado de lado $EN$. **C. Q. D.**

## COROLÁRIO

Se o parâmetro $TP$ for igual ao diâmetro $OT$, deduz-se da definição do parâmetro que $TA = CT$, isto é, igual a **½** do mesmo parâmetro. Logo, teremos $CA = AG$ na figura ***14***. Conclui-se que o triângulo $ABG$ é retângulo em $B$. A justificativa é que como os segmentos $AC = AE = AG$, então os ângulos $AGC = ACG = ACE = AEC$. A soma desses 4 ângulos totaliza dois retos. Logo, o ângulo $GCE$ é reto.

Se as assíntotas de uma hipérbole interceptam uma à outra sob ângulos retos, todos os diâmetros e parâmetros serão iguais. E se em uma hipérbole, um diâmetro for igual ao seu parâmetro, todos os outros também o serão e as assíntotas estarão sob ângulos retos. E ainda, é mais evidente que uma hipérbole, cujas assíntotas não são perpendiculares, não terá qualquer parâmetro igual ao diâmetro.

## PROPOSIÇÃO XXIII

***Sejam os segmentos*** $HI$ $(H'I')$ // $AB$ e $FG$ // $OT$ ***(diâmetro conjugado a*** $AB$***) que se encontram em*** $R$ ***e*** $R'$***. Então,*** $\frac{FR \cdot RG}{HR \cdot RI}\left(\frac{FR' \cdot R'G}{HR' \cdot R'I}\right) = \frac{\text{diâmetro } OT}{\text{seu parâmetro } TP}$

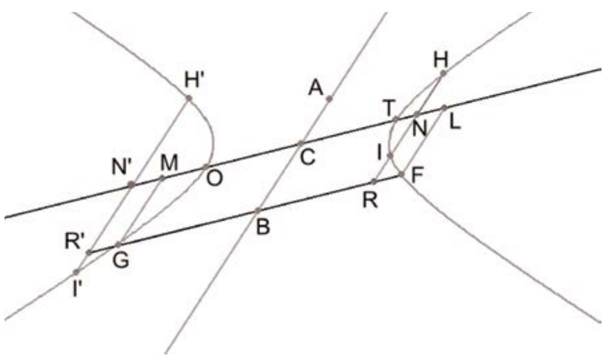



Figura 18

## PROVA

Ao traçar $FL$ e $GM$ ordenadas do diâmetro $OT$, elas serão // $AB$ (pela definição de diâmetro conjugado) e $HN = NI$ (pela proposição **XIX**). Da mesma maneira, $GF$ é dividida ao meio por $AB$. Como $CO = CT$ (prop. **IV**) $ML = GF$ e $MC = CN$ (paralelismo), então $TL = OM$. Pelo corolário da proposição **XXI**, $\frac{LF^2}{NI^2} = \frac{OL \cdot LT}{ON \cdot NT}$.

Estando $R$ no exterior da hipérbole, $\frac{(LF^2 - NI^2) = HR \cdot RI}{NI^2} = \frac{OL \cdot LT - ON \cdot NT}{ON \cdot NT}$ ,

por ser proporção. Mas $OL\,.\,LT - ON\,.\,NT = CL^2 - CT^2 - CN^2 + CT^2 =$
$(CL + CN)(CL - CN) = MN\,.\,NL$ ou $FR\,.RG.$ Portanto, $\frac{HR \cdot RI}{NI^2} = \frac{FR \cdot RG}{ON \cdot NT}$.

Se o ponto $R'$ estiver no interior da hipérbole, por ser proporção,

$$\frac{(N'I'^2 - LF^2) = H'R' \cdot R'I'}{N'I'^2} = \frac{(ON' \cdot N'T - OL \cdot LT) = FR' \cdot R'G}{ON' \cdot N'T}$$

Nesses 2 casos, pela proposição **XXI** e pela definição de parâmetro, $\frac{ON \cdot NT}{NI^2} = \frac{OT}{TP}$

Combinando, obtém-se a proporção: $\frac{FR \cdot RG}{HR \cdot RI} = \frac{OT}{TP}$.

**C. Q. D.**

## PROPOSIÇÃO XXIV

***Sendo** $PH$ **uma tangente e** $PO$ **uma ordenada ao eixo, então** $\frac{CH}{CT} = \frac{CT}{CO}$**.***

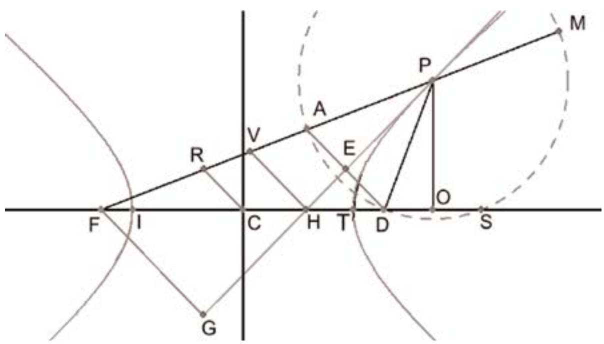



Figura 19

### PROVA

Sendo $F$ e $D$ os focos, descreva o círculo $MSDA$ com centro $P$ e raio $PD$ e trace o segmento $DA$. A tangente $PH$ irá dividir $DA$ ao meio em $E$ (pela proposição **VI**). Pelos pontos $F$, $C$ e $H$, desenhe $FG$, $CR$ e $HV$ paralelas a $DA$. Logo $FR = RA$, porque $FC = CD$.

Dos triângulos semelhantes, $\frac{FP}{PA} = \frac{FG}{AE(= DE)}$, $\frac{FG}{DE} = \frac{FH}{DH}$ e $\frac{FH}{DH} = \frac{FV}{VA}$.

Por transitividade, $\frac{FP}{PA} = \frac{FV}{VA}$. Por ser proporção, $\frac{(FP - PA) = FA}{PA} = \frac{(FV - VA) = 2RV}{VA}$.

Como $\frac{FA}{RA} = \frac{2RV}{RV}$ e, por transitividade, $\frac{RA}{PA} = \frac{RV}{VA}$.

Por ser proporção, $\frac{RA}{(RA + PA) = RP} = \frac{RV}{(RV + VA) = RA}$. Assim $\frac{RA}{RP} = \frac{RV}{RA}$.

Portanto $RA^2 = RP\,.\,RV$.

Por potência do ponto $F$ no círculo $MSDA$, $\frac{FD}{FA} = \frac{FM}{FS}$ e suas metades.
Pelo Teorema de Tales, . Pela propriedade transitiva, . Multiplicando cruzado, $CH \, . \, CO = RP \, . \, RV$. Como foi demonstrado $RP \, . \, RV = RA^2$ e $RA = CT$ por construção, então $CT^2 = CH \, . \, CO$ e portanto. $\frac{CH}{CT} = \frac{CT}{CO}$

## COROLÁRIO

Pela inversão da demonstração do primeiro parágrafo dessa proposição, prova-se que $\frac{IO}{OT} = \frac{IH}{HT}$ e o segmento $IO$ é dito ser dividido harmonicamente por $T$ e $H$.

# PARTE 4 - AS DESCRIÇÕES DAS SEÇÕES CÔNICAS EM UM PLANO

O método de descrição de linhas curvas sobre um plano pelo movimento contínuo de um ponto com máquinas está tão sujeito a erros e não é recomendado ser usado mais de uma vez, visto que sua irreprodutibilidade poderia desencorajar o aluno. Eu estou inclinado a pensar que não existe nada mais apropriado que encontrar um número infinito de pontos, seguindo um modo fácil, através da qual pode ser desenhada a linha curva desejada. Como freqüentemente acontece isso é possível para uma pequena parte da linha curva. Então deve ser achado um grande número de pontos, de tal forma que não produzam erro considerável ao desenhar a curva através dos pontos encontrados. As descrições das 3 seções cônicas que eu apresentei no início das demonstrações de cada uma delas são geralmente tratadas como as mais simples, quando os focos ou eixos são conhecidos. Seria desnecessário procurar por qualquer outra, quando aquelas coisas são fornecidas. Mas como freqüentemente acontece, existem situações onde outros dados serão usados para descrever as seções. Por exemplo, descrever uma parábola sendo fornecidos um dos seus diâmetros, seu parâmetro e o ângulo que a ordenada faz com esse diâmetro. Para descrever a elipse sendo dados seus dois diâmetros conjugados. Descrever uma hipérbole sendo dados o ângulo feito pelas assíntotas e qualquer ponto da curva, ou um diâmetro e seu parâmetro. Enfim, para descrever qualquer uma das 3 seções, dados o diâmetro com uma de suas ordenadas. Eu darei, portanto, as descrições destas linhas nos casos propostos.

## PROBLEMA 1

*Sendo dados um diâmetro da seção cônica e uma ordenada desse diâmetro, deseja-se encontrar o parâmetro deste diâmetro e, na elipse, determinar seu diâmetro menor.*

### SOLUÇÃO PARA A PARÁBOLA

Pela definição ***12***, o diâmetro interceptado está para a ordenada, como a ordenada está para uma terceira proporcional. Pela definição de parâmetro de um diâmetro da parábola conclui-se que esta terceira proporcional é o parâmetro procurado.

### SOLUÇÃO PARA A ELIPSE E HIPÉRBOLE

Pela definição de parâmetro do diâmetro na elipse e na hipérbole e pelas proposições X***VII*** e ***XVIII*** da elipse e ***XXI*** de hipérbole, obtém-se que o retângulo sob as partes daquele diâmetro feitas pela interseção da ordenada com o seu diâmetro está para o quadrado daquela ordenada assim como o diâmetro está para a quarta proporcional. Esta quarta proporcional encontrada será o parâmetro do diâmetro.

Na elipse, faça a média proporcional entre o diâmetro e seu parâmetro. Ao traçar pelo centro do diâmetro um segmento paralelo à ordenada e congruente à média proporcional encontrada, obtém-se o diâmetro menor ao diâmetro proposto.

## PROBLEMA 2

*Em uma hipérbole, sendo dados um diâmetro determinado e seu parâmetro e o ângulo que este diâmetro faz com sua ordenada, deseja-se descrever as assíntotas.*

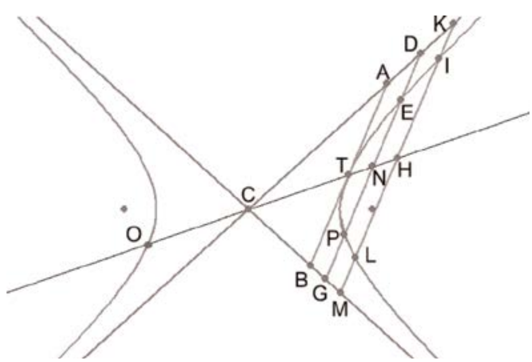



Figura 1

## SOLUÇÃO

Construa o diâmetro dado *OT* e o ângulo *ONE* que este diâmetro faz com sua ordenada. Pela extremidade *T*, desenhe *ATB // EN*. Pela definição de parâmetro do diâmetro, pode-se encontrar a média proporcional *AB* entre o diâmetro *OT* e seu parâmetro, dividida ao meio em *T*. Pelo centro e por *A* e *B*, prolongue *CA* e *CB* em cada lado do centro *C*. Assim, *CA* e *CB* são as assíntotas da hipérbole proposta.

## PROBLEMA 3

*Sendo dados: a reta ITD como o diâmetro da parábola, P como um dos seus pontos e a reta tangente CT. Deseja-se descrever a parábola.*

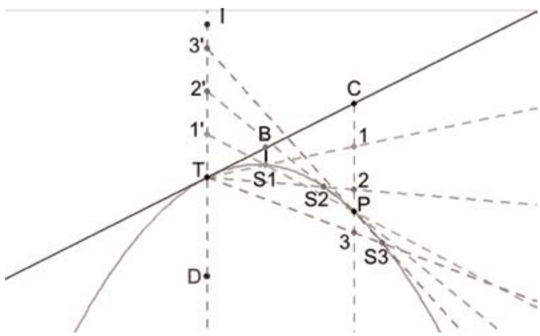



Figura 2

## CONSTRUÇÃO

Pelo ponto *P* desenhe *CP // TD* e prolongue-a para baixo a partir de *P*, marcando os segmentos *C1*, *12*, *23*, *34*, etc. iguais entre si, com o tamanho que você quiser (comece pelo ponto *C*). Prolongue *TD* para cima e marque, a partir de *T*, os segmentos *T1'*, *1'2'*, *2'3'*, etc. congruentes aos anteriores. Desenhe *S* na interseção dos segmentos *P1'* e *T1.* Este ponto *S* é um dos pontos da parábola desejada.

## PROVA

Desenhe *S1B // DT*. Pela semelhança os triângulos *TBS1* e *TC1*, $\frac{BS1}{C1(=T1')} = \frac{TB}{TC}$

e dos triângulos *1'TS1 e S1P1*, $\frac{T1'}{1P} = \frac{TS1}{S11}$ . Pela propriedade de proporção

e por semelhança: $\frac{T1'}{(1P + T1') = CP} = \frac{TS1}{(S11 + TS1) = T1} = \frac{TB}{TC}$ .

Multiplicando as proporções, tem-se: $\frac{BS1}{CP} = \frac{TB^2}{TC^2}$ .

Consequentemente, o ponto *S1* será um dos pontos da parábola, pelo corolário da proposição *XIV* de parábola.

Da mesma maneira, demonstra-se ser *S2* a interseção de *P2'* e *T2*, *S3* a de *P3'* e *T3*, e assim por diante. Todos serão pontos da parábola. Quanto menores forem os segmentos *C1, 12*, etc. mais próximos estarão os pontos *S* um do outro.

## PROBLEMA 4

*Sendo dados os diâmetros conjugados **AB** e **ED** de uma elipse. Deseja-se descrevê-la.*

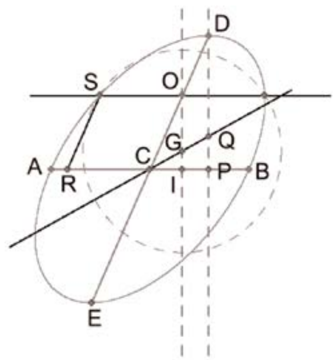



Figura 3

## CONSTRUÇÃO

Por *D* a extremidade de qualquer um dos diâmetros, desenhe *DP* perpendicular a outro diâmetro menor *AB*. Prolongue-o pelos dois lados e sobre esta reta marque *Q* em cada lado de *D*, sendo *DQ = CA = ½ AB*. Pelo ponto *C* e o ponto *Q*, desenhe a reta *CQ* prolongando-a nos dois sentidos. De qualquer ponto *O* do diâmetro *DE*, trace *OS // CA,* e *OG // DQ*. Com centro em *G* e com raio *GS = CA*, descreva o arco *S* encontrando *OS* em *S*. O ponto *S* é um dos pontos da elipse requerida.

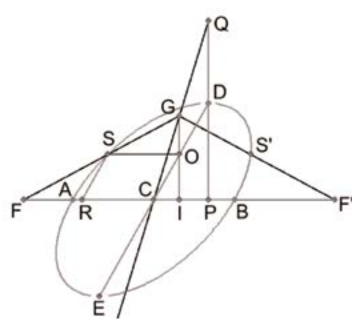



Figura 4

## PROVA

Por semelhança, tem-se: $\frac{CD^2}{CO^2 = RS^2} = \frac{DQ^2(= GS^2 = CA^2)}{OG^2}$. Mas $OG^2 = GS^2 - SO^2$, pois o triângulo $GOS$ é retângulo em $O$. Seguindo do mesmo modo, $GO^2 = CA^2 - CR^2 - GS^2 = SO^2$. Como $CA^2 - CR^2$ é equivalente ao retângulo $BRA$, pois $AB$ é dividido ao meio em $C$, então $\frac{CD^2}{RS^2} = \frac{CA^2}{BR \cdot RA}$. Pela proposição ***XVIII***, o ponto $S$ é um ponto da elipse desejada e assim um infinito número de outros pontos pode ser encontrado.

## OUTRA MANEIRA DE DESCRIÇÃO PARA A MESMA CONSTRUÇÃO

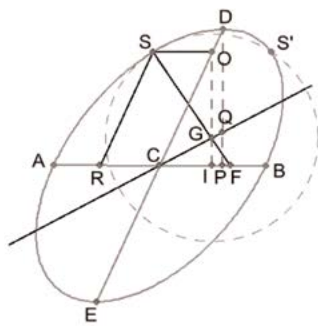



Figura 5

## CONSTRUÇÃO

Desenhe $CQ$ como acima e tome o ponto $G$ qualquer de $CQ$ como um centro e raio $GF = QP$, descreva o arco $F$ cortando $CB$ em $F$. Prolongue $FG$ até $S$ e trace $GS = CA$. O ponto $S$ pertence à elipse desejada.

## PROVA

Por $G$ desenhe $OGI // DQP$. Pela semelhança entre os triângulos $CDQ$, $COG$ e $CGI$, $CPQ$, temos: $\frac{FG(= PQ)}{GI} = \frac{DQ(= GS)}{GO}$ . Assim, $SO$ será $// CA$. Então, pode ser demonstrado como acima que os pontos $S$ e $S'$ são pontos da elipse desejada.

## SENDO OS SEGMENTOS $AB$ E $DE$ OS EIXOS

Se os segmentos $AB$ e $DE$ forem os eixos, o método precedente servirá, pois os segmentos $CQ$ e $CD$ estarão na mesma reta e $QP$ será a diferença na figura ***1*** e a soma na figura ***2*** dos dois semi-eixos. O ponto $G$ deve ser tomado sobre $CQ$ e como os triângulos $COG$ e $CDO$ viraram segmentos, usaremos outra semelhança entre $SOG$ e $FRS$. Assim, os quadrados $\frac{SO^2}{FR^2} = \frac{CA^2}{CD^2}$. Como o ângulo $FRS$ é reto, $FR^2 = CD^2 - CO^2$. Por sua vez, $CD^2 - CO^2 = OD \,.\, DE$, pois $CE = ED$. Logo, $\frac{SO^2}{OD \cdot DE} = \frac{CA^2}{CD^2}$ .

## OUTRA MANEIRA DE DESCRIÇÃO COM O AUXÍLIO DE UM CÍRCULO

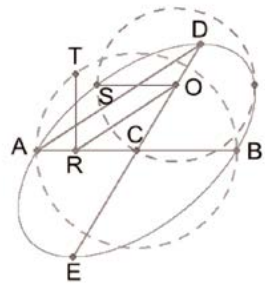



Figura 6

Dados $AB$ e $ED$, descreva o quadrante de um círculo com o raio $CA$ e centro $C$ e faça o segmento $AD$. Do ponto $R$ do diâmetro $CA$ você constrói uma perpendicular a $CA$ e a prolonga até a circunferência do círculo. Pelo conceito de potência de ponto, esta perpendicular será uma média proporcional entre $BR$ e $RA$. Ao desenhar $RO // AD$ (sendo $O$ sobre $CD$) e $OS // CA$ igual à média proporcional entre $BR$ e $RA$. Eu afirmo que o ponto $S$ está na elipse procurada.

Os semelhantes $CAD$ e $COR$, $\frac{CD^2}{CA^2} = \frac{CO^2}{CR^2}$. Por proporção, $\frac{CD^2 - CO^2}{CA^2 - CR^2} = \frac{CD^2}{CA^2}$ .

Sabe-se que $CD^2 - CO^2 = EO.OD$ e $CA^2 - CR^2 = BR.RA$

Combinando, $\frac{CD^2}{CA^2} = \frac{EO \cdot OD}{BR \cdot RA = OS^2}$. Assim $\frac{CD^2}{CA^2} = \frac{ED^2}{BA^2} = \frac{EO \cdot OD}{OS^2}$. Pela proposição XVIII de elipse, o ponto $S$ é um ponto da elipse procurada. Perceba que nesta suposição $OS$ e $CR$ não são iguais como na Figura **1**.

# PROBLEMA 5

*Sendo dadas as assíntotas $CD$ e $CM$, além de um ponto $P$ da hipérbole, deseja-se descrever a hipérbole.*

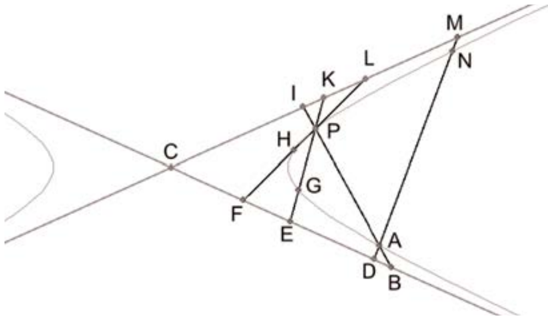



Figura 7

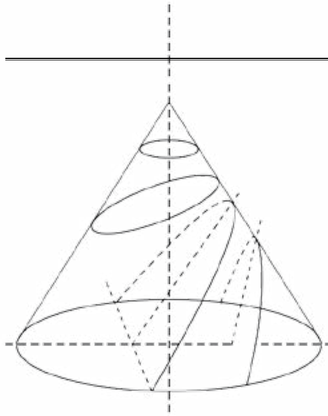
## SOLUÇÃO

Por $P$, desenhe os segmentos $BPI$, $EPK$ **e** $EPL$ a seu gosto, limitados pelas assíntotas. Faça $BA = PI$, $EG = PK$ **e** $FH = PL$. Os pontos $A$, $G$, $H$, pertencem à hipérbole requerida, por causa da proposição XIII de hipérbole.

Por qualquer um dos pontos encontrados, trace outros segmentos como $DM$, faça $MN = DA$. É evidente, pela mesma razão, que o ponto $N$ está na hipérbole.

## FIM

# CAPÍTULO 5



# COMENTÁRIOS SOBRE AS TRADUÇÕES

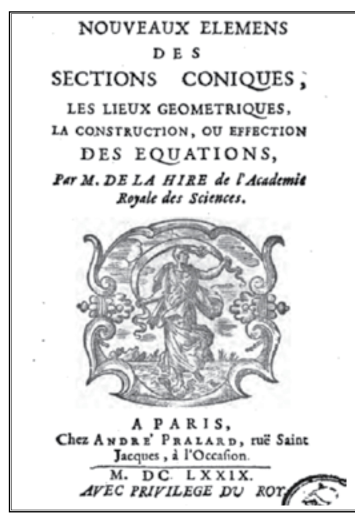
## 5.1 – AS FONTES DA TRADUÇÃO PARA O PORTUGUÊS

Foram duas, as versões eletrônicas utilizadas como referências na tradução dessa obra para o português.

**A primeira [6],** em francês, foi publicada em *1679*. É mais completa, visto que possui as três partes citadas no capítulo anterior: "Novos Elementos das Seções Cônicas" (181 páginas), "Os Lugares Geométricos" (118 páginas) e "A Construção das Equações Analíticas" (162 páginas).

Em relação ao primeiro livro sobre cônicas que estamos focando, ele contem 176 páginas (mais 5 do prefácio) divididas 4 partes. Possui 38 definições, 2 lemas, 59 proposições, 5 problemas e 70 figuras (17 de parábola, 24 de elipse, 22 de hipérbole e 7 dos problemas).

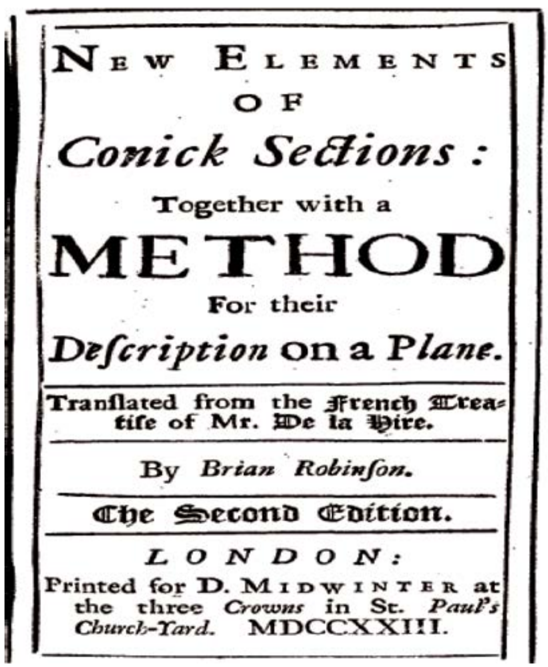
Nesta versão [6], entretanto, faltam parte do prefácio e algumas páginas do primeiro livro: *20 e 21* (parábola); *38, 39, 60 e 61* (elipse); *118* e *119* (hipérbole). Eis a sua capa:



NOUVEAUX ELEMENS
DES
SECTIONS CONIQUES,
LES LIEUX GEOMETRIQUES,
LA CONSTRUCTION, OU EFFECTION
DES EQUATIONS,
*Par M. DE LA HIRE de l'Academie Royale des Sciences.*

A PARIS,
Chez ANDRE' PRALARD, ruë Saint Jacques, à l'Occasion.
M. DC. LXXIX.
*AVEC PRIVILEGE DU ROY.*

**A segunda [7],** em inglês, é fruto de uma tradução feita do francês para o inglês por Brian Robinson em *1723*. Em versão digital, a segunda edição desta tradução é composta por *131* páginas divididas 4 partes. Faz 38 definições, 2 lemas, 61 proposições, 54 figuras (12 de parábola, 19 de elipse, 18 de hipérbole e 5 dos problemas) e 5 problemas. Ela, entretanto, só contém a primeira parte da obra "Novos Elementos das Seções Cônicas". A segunda e a terceira parte, talvez, não tenham sido traduzidas. Nesse caso, o foco do Brian Robinson estava nas cônicas, uma vez que a segunda e a terceira partes não tratam de cônicas prioritariamente, mas sim da geometria analítica. Essa tradução de Roninson foi bastante fiel ao texto original. As suaves diferenças serão citadas mais adiante. Esta versão teve para nós grande importância, pois foi a primeira fonte que obtivemos. Não possui falta de páginas como na versão em francês. Eis a sua capa:



NEW ELEMENTS
OF
*Conick Sections:*
Together with a
METHOD
For their
*Deſcription* on a *Plane.*

Tranſlated from the French Trea-
tiſe of Mr. De la Hire.

By *Brian Robinſon.*

The Second Edition.

*LONDON:*
Printed for D. MIDWINTER at
the three *Crowns* in St. *Paul's*
*Church-Yard.* MDCCXXIII.

Uma observação relevante é que o texto em francês apresenta ***15*** proposições sobre parábola, enquanto a tradução para o inglês possui ***17*** proposições. A numeração da obra original não possui interrupção o que permite especulações sobre quem escreveu as proposições *XVI* e *XVII*. O estilo de escrita e argumentação se assemelham ao resto da obra. Cabem duas possíveis explicações: ou La Hire as incorporou numa edição seguinte à que possuímos ou elas foram adicionadas por alguém, possivelmente por Robinson.

## 5.2 – CRONOLOGIA E AS VERSÕES DA TRADUÇÃO PARA O PORTUGUÊS

Em dezembro de *2006* aconteceu o primeiro contato com a versão em inglês traduzida por Robinson.

Em agosto de *2007*, foi finalizada a primeira versão da tradução feita para o português a partir desta tradução feita por Brian Robinson. Foi feita quase uma transliteração, com máxima fidelidade ao original, mantendo inclusive pontuação e a apresentação.

Em setembro, foi feita a primeira revisão e a consequente segunda versão para a tradução. Nesta segunda versão, foram feitas algumas adaptações à linguagem atual.

Em janeiro de *2008*, tivemos acesso a uma versão digital do original em francês feita por La Hire com todas as três partes da obra. No mês seguinte, finalizamos a terceira versão da tradução com mais adaptações à linguagem atual, principalmente na simbologia, mas ainda com extrema fidelidade ao texto original.

Finalmente, em julho de 2008, após a qualificação do mestrado, preparamos a quarta e última versão (atual e definitiva), desta vez sem nenhuma adaptação aos termos matemáticos atuais. Ou seja, retornamos ao espírito da primeira versão, só que feita a partir do texto original e com adaptação apenas à pontuação da língua portuguesa.

A versão final da tradução para o português ficou com 60 páginas e 58 figuras (13 de parábola, 19 de elipse, 19 de hipérbole e 7 dos problemas).

Faremos, a seguir, comentários sobre a tradução para o português, assim como sobre a tradução para a língua Inglesa feita por Robinson. Seguiremos a seqüência do texto do La Hire, proposição a proposição, fazendo observações sobre cada alteração feita pelas duas traduções.

## 5.3 – DESCRIÇÃO DAS MODIFICAÇÕES REALIZADAS NAS DUAS TRADUÇÕES DO TEXTO: *“NOVOS ELEMENTOS DAS SEÇÕES CÔNICAS”* DE PHILIPPE DE LA HIRE (1679)

## PARTE 1 - A PARÁBOLA

### A GÊNESE DA PARÁBOLA

Na tradução para o português, foi evitada a repetição de letras para falar de pontos diferentes na figura. Em vez de $P$ e $P$, usou-se $P$ e $P'$.

## DEFINIÇÕES

La Hire definiu **Parábola**, **Foco**, **Eixo**, **Ordenada**, **Diâmetro** e **Tangente**. Brian Robinson adiciona as definições de **Vértice e Abscissa** na sua tradução. Na tradução para o português, foram mantidas as definições feitas por Brian Robinson. Vale frisar que La Hire já utiliza os objetos matemáticos definidos a mais por Brian Robinson. Apenas não atribuiu nenhum nome especial para eles.

### PROPOSIÇÃO I

Uma figura foi retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da figura da página ***2*** de [6]. Brian utiliza uma letra minúscula para representar cada segmento, enquanto na tradução para o português, foi mantida a simbologia original. Já a definição de "Parâmetro do Eixo" foi numerada de forma acumulativa na tradução para o português, para fins de facilitação na identificação, enquanto nas demais não houve numeração.

### PROPOSIÇÃO II

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções. É a primeira proposição onde La Hire não colocou uma figura.

### PROPOSIÇÃO III

O parágrafo final foi retirado na tradução para o inglês, pois a prova foi completada anteriormente. Este parágrafo retirado repete algo que já foi parcialmente dito no corolário da construção. Optamos por mantê-lo na tradução para o português.

### PROPOSIÇÃO IV

A figura sobre o enunciado dessa proposição foi retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da figura da página 8 de [6]. Brian comete um erro na tradução ao afirmar que o ponto *S*, que é assumido como sendo da parábola e também (pela hipótese do absurdo) foi assumido fora da reta tangente, pertence à reta tangente (Página *11* em [6] e *9* em [7]).

### PROPOSIÇÕES V, VI E VII

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções. O texto de Robinson comete um erro no enunciado da proposição **7** ao usar a palavra "contract" em vez de "contact".

### PROPOSIÇÃO VIII

A figura sobre o seu enunciado foi retirada nas duas traduções, pois é cópia da figura da proposição **7**.

## PROPOSIÇÃO IX

Ela está faltando em [6]. Consequentemente, utilizamos o texto do Robinson [7]. Nenhuma modificação foi feita na tradução para o português.

## PROPOSIÇÃO X

A figura sobre o enunciado foi retirada na tradução para o inglês, uma vez que é uma cópia da figura da proposição XI. Foi feita a troca de BP por PI no enunciado dessa proposição traduzida para o português, pois o diâmetro foi definido sendo interior à parábola. Além disso, a figura que é igual a da proposição 11 foi mantida, algo provavelmente feito por La Hire, embora não esteja presente em [6].

## PROPOSIÇÃO XI

A figura foi retirada na tradução para o português, uma vez que é uma cópia da figura da proposição 10. Na tradução para o inglês, ela foi mantida.

## PROPOSIÇÃO XII

Uma das duas figuras existentes no original sobre o enunciado foi retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da figura da proposição 10.

## PROPOSIÇÃO XIII

A definição de “Ordenada do Diâmetro” foi numerada de forma acumulativa na tradução para o português, para fins de facilitação na identificação, enquanto nas demais não houve numeração. É a segunda proposição onde La Hire não colocou uma figura.

## PROPOSIÇÃO XIV

Na tradução para o inglês, Brian utilizou o termo “Abscissa” de um diâmetro na definição do “Parâmetro do Diâmetro”, mas não o definiu. A definição de “Parâmetro do Diâmetro” foi numerada de forma acumulativa na tradução para o português, para fins de facilitação na identificação, enquanto nas demais não houve numeração.

## PROPOSIÇÃO XIV

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

## PROPOSIÇÕES XVI E XVII

Elas estão ausentes na versão eletrônica em francês [6], estando apenas na tradução do Brian Robinson [7].

Na décima sexta, há um erro no seu enunciado ao se referir à parábola AFB, uma vez que F não pertence à curva. Robinson usa outra simbologia ao se referir a um retângulo citando seus lados separados pelo sinal de vezes e a simbologia que significa elevar ao quadrado ganha um q em vez do símbolo 2 sobrescrito à direita.

Na décima sétima, algumas letras, que representam pontos na figura 13, foram trocadas na tradução para o português com o intuito de ficar mais parecido com a figura anterior (12).

# PARTE 2 - ELIPSE

## A GÊNESE DA ELIPSE

Na tradução para o português, foi evitada a repetição de pontos para falar de um ponto genérico *P* que Brian utilizou no texto e La Hire na figura. Em vez de *P* e *P*, usou-se *P* e *P'*.

## DEFINIÇÕES

As páginas do original de La Hire, relativas às definições, estão faltando na versão eletrônica [6]. Supomos que ele tenha definido os conceitos de **Elipse, Centro**, **Grande Eixo, Pequeno Eixo**, **Focos**, **Ordenada**, **Diâmetro** e **Tangente**. Os termos "Grande eixo" e "Pequeno Eixo" são usados durante o texto. Brian Robinson faz uma modificação na sua tradução e usa o termo "Eixo Transversal" substituindo o "Grande Eixo" e "Eixo Conjugado" substituindo o "Pequeno Eixo". Não define, porém, **Vértice e Abscissa,** como fez na parábola.

### LEMA I

Nenhuma alteração foi feita pelas traduções. Vale frisar que hoje conhecemos essa propriedade descrita como "Potência de um Ponto" em relação a uma Circunferência.

### PROPOSIÇÃO I

A figura sobre o enunciado foi retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da figura inicial da elipse. Corrigimos ainda um erro cometido no original e na tradução que trocou a letra F pela letra P no final da demonstração (PO em vez de FO).

### PROPOSIÇÕES II E III

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções. É a terceira e a quarta proposições do texto onde La Hire não colocou figura.

## PROPOSIÇÃO IV

La Hire não coloca figura para a proposição 5ª vez . A figura sobre as definições apresentadas é retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da figura da proposição **V**. A numeração das definições é mudada de 1 e 2 para 9 e 10 na versão para o português para melhor identificação.

## PROPOSIÇÃO V

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

## PROPOSIÇÃO VI

Brian corrige uma letra errada usada na figura do texto de La Hire para um dos focos (E em vez de F). Na tradução para o português, tanto na figura quanto no texto, foi retomada a letra F em função da busca de uniformidade uma vez que os focos foram sempre chamados de D e F.

## PROPOSIÇÕES VII, VIII E VIX

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

## PROPOSIÇÃO X

No original, está faltando o corolário.

Na tradução para o inglês, está presente uma figura inadequada. La Hire (6ª vez) e a nossa tradução não colocaram figura, apenas se referem à figura da proposição **8**.

## PROPOSIÇÃO XI

A décima primeira proposição está em parte faltando no original. A seguir, vai uma prova do corolário, uma vez que não foi demonstrada na obra. O corolário diz que o segmento IH é dividido harmonicamente pelos pontos O e T. Eis a prova:

*Da proposição 11:*

$$CT \cdot CT = CO \cdot CH \rightarrow CT \cdot CT = (CT - TO) \cdot (CT + TH) \rightarrow$$

$$CT \cdot TO + TH \cdot TO = CT \cdot TH \rightarrow HC \cdot TO = CT \cdot TH \rightarrow (IH - IC) \cdot TO = CT \cdot TH \rightarrow$$

$$IH \cdot TO = IC \cdot TH - IC \cdot TO \rightarrow IH \cdot TO = IC \cdot OH \qquad (1)$$

*Da proposição 11:* $CO \cdot OH = CT \cdot CT \rightarrow CO \cdot OH = (CO + OT) \cdot (CH - HT) \rightarrow$

$$OT \cdot CH - OT \cdot TH = CO \cdot TH \rightarrow OT \cdot CT = CO \cdot TH \rightarrow OT \cdot CT + TH \cdot CT = CO \cdot TH + TH \cdot CT \rightarrow IC \cdot OH = IO \cdot TH \qquad (2)$$

*De (1) = (2), tem-se:* $IH \cdot TO = IO \cdot TH$.

## PROPOSIÇÕES XII E XIII

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

## LEMA II

Brian se refere a um quadrilátero como "figura quadrilátera".

## PROPOSIÇÃO XIV

As duas traduções reduziram de quatro figuras para uma, visto que existem duas figuras diferentes e as outras duas são repetidas. Dessas duas diferentes, uma foi feita e a outra omitida, pois é igual à figura da proposição 15. Robinson erra ao fazer referência à segunda figura dessa proposição.

## PROPOSIÇÃO XV

As duas traduções reduziram de três para duas figuras. Dessas duas, uma foi feita e a outra omitida, visto que uma delas é igual à figura da proposição 16. Robinson erra ao fazer referência às figuras usadas no primeiro, quarto e quinto parágrafos da demonstração. Na tradução para português, há na segunda figura uma mudança nas letras repetidas que tanto La Hire e Brian utilizam. O objetivo é evitar confusão de interpretação.

## PROPOSIÇÃO XVI

La Hire fez referência a outras figuras onde também se verifica esta proposição. As duas traduções não sentiram tal necessidade.

## PROPOSIÇÃO XVII

Uma figura foi retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da segunda figura da proposição XV. O texto do Robinson comete quatro erros: a letra f em vez de e, a letra L em vez de E, falta um quadrado de RP (todos os três no último parágrafo da página 66) além de uma referência errada da figura.

## PROPOSIÇÃO XVIII

A numeração das definições foi modificada na tradução para o português para facilitar a identificação.

## PROPOSIÇÃO XIX

Brian adicionou uma figura desnecessária, uma vez que é uma cópia da figura da proposição 18. La Hire (sétima vez) e a tradução para o português não colocaram figura.

### PROPOSIÇÃO XX

Na tradução para o português, foi corrigida uma troca de letra feita por La Hire e por Brian: *AB* em vez de *AD*. Também foi corrigida uma troca feita apenas no texto original: *LF* em vez de *LE*. Foi corrigida uma troca no texto em inglês: *OI* em vez de *DI*.

## PARTE 3 – HIPÉRBOLE

### A GÊNESE DA HIPÉRBOLE

Como a hipérbole tem dois ramos, La hire utilizou letras diferentes para cada ramo, mas para pontos no mesmo ramo utilizou a mesma letra. Robinson repetiu essa escolha. Na tradução para o português, foi evitada essa repetição. Foi adicionado P’ para o outro ponto no mesmo ramo de P e p’ para o outro ponto no mesmo ramo de p.

### DEFINIÇÕES

La Hire definiu os conceitos de **Hipérbole, Centro**, **Eixo Determinado, Eixo Indeterminado**, **Focos**, **Ordenada**, **Diâmetro Determinado e Indeterminado** e **Tangente**. Brian Robinson não definiu **Vértice e Abscissa,** como fez na parábola.

### PROPOSIÇÃO I

A figura sobre o enunciado foi retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da figura inicial de hipérbole. Brian corrige um erro cometido no original que trocou *RP – CO* por CO – RP na segunda parte da demonstração. Mas sua tradução contém um erro ao trocar *IO* por *TO* ao fim do primeiro parágrafo. A tradução para o português corrige esses erros.

### PROPOSIÇÃO II

La Hire não colocou uma figura nova e utilizou a anterior 8ª vez. Na sua demonstração, a conclusão da congruência dos segmentos *PM* e *pM* é obtida sem a devida justificativa. Brian tenta dar alguma justificativa (cita ângulo reto), mas é insuficiente. A congruência de triângulos poderia ter sido usada.

No corolário, Brian introduz uma justificativa algébrica para obter a conclusão desejada. A tradução para o português retira esse aditivo por parecer desnecessário, deixando exatamente como fez La Hire.

As definições de “Parâmetro do Eixo” e de “Figura de um Eixo” foram numeradas de forma acumulativa na tradução para o português, para fins de facilitação na identificação, enquanto nas demais não houve numeração.

## PROPOSIÇÃO III

A figura dessa proposição foi retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da figura na definição de Parâmetro do Eixo**.**

## PROPOSIÇÃO IV

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

O argumento da congruência de triângulos poderia ser usado para detalhar a demonstração.

## PROPOSIÇÃO V

Essa é a 9ª proposição do texto onde La Hire não colocou uma figura e utiliza uma anterior.

Para dar outra justificativa para a segunda parte da proposição, propõe-se a seguinte demonstração:

*Na figura da proposição 6, podemos concluir que, se $A$ é um ponto no exterior da hipérbole, então $|FA - DA| < IT$. Para justificar este fato basta considerar P o ponto da hipérbole sobre o prolongamento de $FA$ e notar que: (1) $PA = FP - FA$ por construção; (2) $DP < DA + PA$ pela desigualdade triangular e (3) $|FP - DP| = IT$ por construção. De (1), (2) e (3) podemos concluir que $|FA - DA| < |FP - DP| = IT$.*

*Pela desigualdade triangular para o triângulo $FSd$, temos que: $FS < Fd + Sd$. Logo $FS - Fd\ (=FD) < Fd = IT$. Logo $S$ é exterior.*

## PROPOSIÇÃO VI

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

Outra justificativa para a segunda parte da proposição pode ser feita usando as mesmas idéias que as usadas na proposição anterior só que em vez do ponto *S*, usa-se o ponto *p* da reta tangente *PE* e o triângulo *FpA*.

## PROPOSIÇÃO VII

Essa é a 10ª proposição do texto onde La Hire não colocou uma figura e utiliza uma anterior.

Na tradução de Robinson há um provável erro de impressão no enunciado que troca o ângulo *FPE* por *EPE*, além de trocar o ponto P da hipérbole por T.

## PROPOSIÇÃO VIII

Está faltando o corolário em [6]. A definição de assíntota foi numerada de forma acumulativa na tradução para o português, para fins de facilitação na identificação, enquanto nas demais não houve numeração.

## PROPOSIÇÃO IX

Provavelmente La Hire fez uma figura (a página está faltando). Nas duas traduções ela foi retirada, uma vez que é uma cópia da figura imediatamente anterior.

## PROPOSIÇÃO X

A figura dessa proposição foi retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da figura imediatamente anterior. Na tradução para o português, foi evitada a repetição de letras para pontos diferentes, algo feito no original e na outra tradução.

## PROPOSIÇÃO XI

Essa é a 11ª proposição do texto onde La Hire não colocou figura e usa uma anterior.

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

Outra justificativa, em linguagem atual, para a proposição é a seguinte: *como $PB = TA^2 / PG$ e pela proposição 1, quanto mais distante do centro estiver o ponto O, maior será o segmento PG. Consequentemente, PG pode ser feito tão grande quanto se queira. Assim, fazendo o limite de $TA^2 / PG$ quanto PG tende para infinito, obtém-se um segmento PB tendendo para zero.*

## PROPOSIÇÃO XII

Na tradução para o português, foi corrigida uma troca de letras que foi feita apenas no texto de Robinson (o triângulo *KAD* em vez de *KHD*).

## PROPOSIÇÃO XIII

Na tradução para o português, foi evitada a repetição de letras para pontos diferentes, algo feito no original e na outra tradução.

## PROPOSIÇÃO 14

Na tradução para o português, foi corrigida uma troca de letras (*PF* em vez de *pF*) feita pelo texto em inglês, como também o uso inadequado do termo "Ordenada" nos 2 textos.

Com as ferramentas atuais, a segunda parte da demonstração dessa proposição pode ser obtida a partir da proposição XIII quando, no limite, os pontos P e A se tornam um único ponto, ou seja, a secante vira tangente.

## PROPOSIÇÃO XV

No enunciado dessa proposição, as duas traduções separaram as letras P, F e B, D, já que La Hire se refere aos pontos escrevendo-os juntos: PF e BD.

Na tradução para o português, foi evitada a repetição de letras para pontos diferentes, algo feito no original e na outra tradução.

## PROPOSIÇÃO XVI

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

## PROPOSIÇÃO XVII

Vale ressaltar que o segundo ponto A da hipérbole pode estar no outro ramo (A') como insinua a figura existente no original.

A fórmula atual do cálculo da área do paralelogramo (produto dos lados consecutivos e do seno do ângulo entre eles) poderia ser usada para finalizar a demonstração.

## PROPOSIÇÃO XVIII

Na tradução para o português, a figura teve alguns pontos e segmentos retirados. Eles ressaltavam a possibilidade dos pontos da hipérbole que ilustram a proposição estarem no mesmo ramo. Eles tornavam a figura mais carregada.

## PROPOSIÇÃO XIX

Na tradução para o português, foi corrigida uma troca de letras feita por Brian (*PN* em vez de *ON*).

## PROPOSIÇÃO XX

Na tradução para o inglês, foi omitido o uso da proposição *XIII*. As definições de "Diâmetros Conjugados" e de "Ordenada do Diâmetro" foram numeradas de forma acumulativa na tradução para o português, para fins de facilitação na identificação, enquanto nas demais houve outra numeração.

## PROPOSIÇÃO XXI

Essa é a 12ª proposição do texto onde La Hire não colocou uma figura e utiliza uma anterior. Mas ele coloca uma figura para definições seguintes.

Na tradução para o português, é corrigida uma troca de letra na definição de parâmetro de diâmetro (*CT* em vez de *CA*) existente na versão em inglês.

As definições de "Parâmetro do Diâmetro" e de "Figura do Diâmetro" foram numeradas de forma acumulativa na tradução para o português, para fins de facilitação na identificação, enquanto nas demais houve outra numeração.

### PROPOSIÇÃO XXII

A figura dessa proposição foi retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da figura anterior.

### PROPOSIÇÃO XXIII

Na tradução para o português, foi evitada a repetição de letras para pontos diferentes, algo feito no original e na outra tradução.

### PROPOSIÇÃO XXIV

Na tradução para o inglês, aparece uma letra C indevida na última linha do texto.

## PARTE 4 - AS DESCRIÇÕES DAS SEÇÕES CÔNICAS EM UM PLANO

### PROBLEMA 1

É a primeira vez que um resultado não possui figura para auxiliar o entendimento.

### PROBLEMA 2

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

### PROBLEMA 3

Na tradução para o português, o ponto i virou 1, o ponto I virou 1', o ponto II virou 2', o ponto III virou 3', etc. Buscou-se símbolos mais simples.

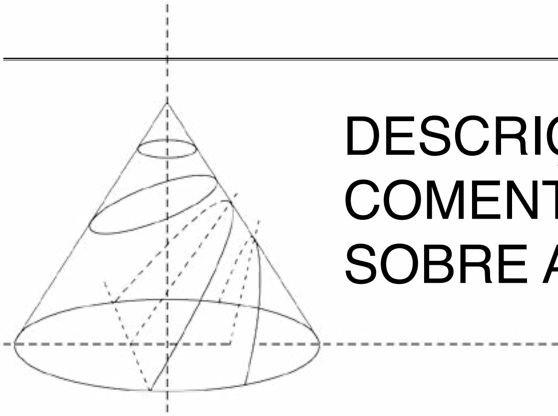
### PROBLEMA 4

A terceira e a quarta figuras são retiradas na tradução para o inglês, pois é repetição das duas primeiras. Mas a tradução para o português só retira a quarta, pois a terceira sofreu uma pequena modificação. E ainda nesta tradução, uma nova figura é acrescentada na tradução para o português na última descrição que utilizou o círculo.

### PROBLEMA 5

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

CAPÍTULO 6



# DESCRIÇÃO E COMENTÁRIOS SOBRE A OBRA

## 6.1 – UMA BREVE DESCRIÇÃO DAS 3 PARTES DA OBRA DE 1679

O texto publicado por Philippe de La Hire em 1679 [6] tem 452 páginas, fora o prefácio da primeira parte. É dividido em três partes:

- A primeira aborda as seções cônicas: **"Novos Elementos das Seções Cônicas"**. Ela apresenta diversas propriedades das cônicas a partir de uma definição que utiliza o(s) foco(s), de forma isolada e totalmente no plano. É o alvo da nossa dissertação.
- A segunda parte, "**Os Lugares Geométricos",** apresenta diversos lugares geométricos e as respectivas equações analíticas que os representam. Em seguida, faz uma série de definições a respeito dos lugares geométricos e apresenta modelos básicos de equações a fim de reduzir equações mais complicadas nesses modelos. Por fim, associa determinadas equações aos lugares geométricos pré-definidos fazendo as demonstrações.
- A terceira, **"A Construção das Equações Analíticas"**, faz a construção geométrica das soluções das equações analíticas, utilizando os lugares geométricos apresentados anteriormente e suas respectivas equações.

Embora as três partes possuam algum vínculo, a ligação mais forte existente é entre a segunda e a terceira partes. Elas possuem um perfil analítico e o seu alvo reside na relação entre as curvas e suas respectivas equações analíticas.

Já a primeira parte tem um enfoque sintético. Ela pode ser considerada outro livro. A segunda e a terceira partes utilizam esta primeira parte como motivação e ponto de partida para a descrição de lugares geométricos através de equações.

Conforme visto no capítulo anterior, foi feita a tradução da primeira parte “Novos Elementos das Seções Cônicas”, exclusivamente. Exatamente como fez Brian Robinson, em 1723. O motivo da escolha desta parte está na crença de que, além de um texto histórico relevante, ela merece ser lida por outras pessoas interessadas no tema em razão da sua simplicidade e da sua beleza. É um texto que pode servir para ampliar o conhecimento sobre as curvas cônicas através de um enfoque sintético, o que enriquece a formação do professor que, na sua maioria, conhece apenas o enfoque analítico predominante nos dias de hoje. Além disso, pode servir de aplicação para conteúdos do programa de ensino de geometria nos ensinos fundamental e médio do Brasil.

O texto que se segue irá, então, abordar apenas esta primeira parte da obra de Philippe de La Hire sobre as seções cônicas. A obra será descrita e comentada, sob um ponto de vista atual. O conteúdo das proposições, a forma como La Hire as demonstrou, a interligação entre propriedades análogas das diferentes cônicas e a conexão com a linguagem utilizada atualmente.

## 6.2 – A DESCRIÇÃO DO 1º LIVRO *“NOVOS ELEMENTOS DAS SEÇÕES CÔNICAS”*

Neste livro, La Hire apresenta separadamente cada uma das cônicas, exclusivamente no plano, em 176 páginas. Ele define cada uma delas a partir de uma propriedade em relação aos focos e enuncia um conjunto de proposições sobre cada curva. Sobre a parábola faz 17 teoremas, sobre a elipse faz 20 teoremas e 2 lemas e sobre a hipérbole mais 24 teoremas. Ao final, faz uma descrição das seções cônicas onde propõe cinco problemas de construção das cônicas a partir de outros dados que não sejam os focos. Será feita, a seguir, a descrição desse texto, proposição a proposição, com os comentários que consideramos pertinentes para sua efetiva execução.

## PARTE 1 - A PARÁBOLA

La Hire definiu a “Parábola” no plano através da propriedade da eqüidistância dos seus pontos a um ponto dado (Foco) e a uma reta dada (hoje chamada “Diretriz”).

Fez uma construção que obtém um ponto P da parábola através de um triângulo isósceles $PAF$ de base $AF$, onde $F$ é o foco, $A$ pertence à diretriz e $PA$ é perpendicular à diretriz .

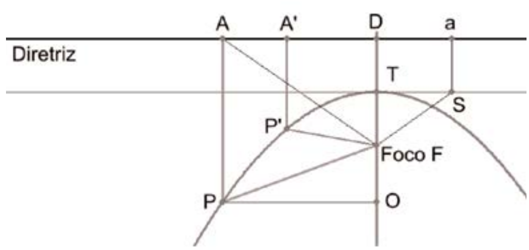
No corolário, ao afirmar que o ponto $T$ pertence à curva, deixou claro o seu conhecimento sobre esse ponto especial hoje chamado "Vértice", embora não utilize nenhum termo especial para ele.

Em seguida, veio uma série de definições. Chamou a curva construída de "**Parábola"** e diversos elementos geométricos que podem ser evidenciados na construção são nomeados: o **Foco F** como aquele ponto usado na definição de parábola, o **Eixo**[1] como a reta perpendicular à diretriz que contém o foco, **Ordenada** como o segmento perpendicular ao eixo limitado pela parábola e pelo eixo, **Diâmetro**[2] como uma semi-reta paralela ao eixo limitada pela parábola e interior a ela e **Tangente** como a reta exterior à parábola que a cruza em apenas um ponto. Adicionamos o conceito de Interior e Exterior.

O texto contém **17** proposições sobre a parábola e mais **4** definições: **Parâmetro do Eixo, Ordenada de um Diâmetro** e **Parâmetro do Diâmetro**. adicionamos o conceito de Abscissa. Estas proposições e definições serão descritas a seguir.

## PROPOSIÇÃO I

***O quadrado da ordenada de um ponto P qualquer da parábola é igual ao produto da distância entre o vértice T e a projeção O perpendicular de P sobre o eixo e de uma constante que é igual ao dobro da distância entre o foco F e a interseção D entre o eixo e a diretriz, ou seja,*** $PO^2 = TO \cdot 2FD$.




Na demonstração dessa proposição, utilizou o paralelismo existente entre o eixo e a projeção ortogonal do ponto $P$ da parábola sobre a diretriz, a eqüidistância de P ao foco e à diretriz e o resultado que conhecemos hoje por

***Obs. 1****: La Hire não usou o termo simetria, pois este só viria a ser utilizado por Legendre cerca de 150 anos depois por Legendre.*

***Obs. 2****: ele definiu diâmetro como uma semi-reta, mas o utiliza no texto como uma reta.*

***Obs. 3****: Essa distância é hoje chamada "Ordenada", uma vez que é a projeção ortogonal sobre o eixo Y que coincide com o eixo da parábola e é perpendicular ao eixo X. A origem desse par de eixos costuma ficar no vértice T.*

Teorema de Pitágoras.

No primeiro corolário, definiu uma constante $2 \cdot FD$ que chama "Parâmetro do Eixo" (hoje também chamada distância focal mínima por ser a menor entre as cordas que passam pelo foco).

No segundo corolário, informou que a distância entre o foco e o vértice $FT$ corresponde ¼ do parâmetro, ou seja, $T$ é o ponto médio de $FD$.

No terceiro corolário, concluiu que as razões entre os quadrados das ordenadas de dois pontos da parábola e suas respectivas abscissas (segundo Robinson) são iguais entre si e ao parâmetro, propriedade apresentada pela primeira vez por Arquimedes (página 40 de [1]).

Esta proposição será usada na proposição XVI e o seu corolário 3, na proposição XI.

Esta primeira proposição vem a ser aquela que, segundo Vicenzo Bongiovanni em sua tese de doutorado [1], foi utilizada por Apolônio para justificar a origem do termo "Parábola". Em grego, significa "superposição" e foi usado por Euclides em "Os Elementos" para expressar a idéia de igualdade entre as áreas de duas figuras. No nosso caso, há equivalência entre as áreas de um quadrado cujo lado é a ordenada e um retângulo cujos lados são abscissa e o parâmetro. O próprio Philippe de La Hire faz um comentário sobre as três cônicas a partir dessa proposição, no prefácio da sua obra [6].

A sua demonstração em linguagem analítica atual ficaria assim: sendo $x$ a abscissa, $p$ o parâmetro $2FD$ e $y$ a ordenada $TO$, aplica-se o Teorema de Pitágoras para o triângulo $POF$, onde $PF = y + p/4$, $PO = x$ e $FO = y - p/4$. Ao desenvolvermos, surge a equação analítica atual $y = x^2/p$. Ela pode ser usada no ensino atual para justificar a origem da equação da Parábola.

## PROPOSIÇÃO II

*A reta paralela à diretriz e que passa pelo vértice $T$ é uma tangente à parábola (figura da proposição **1**).*

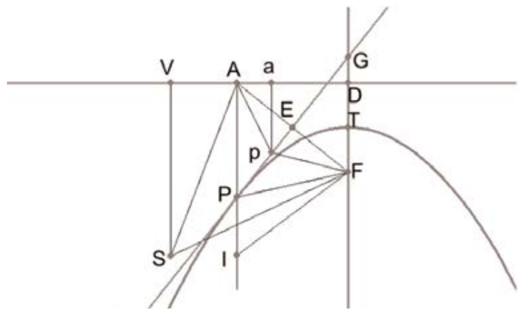
Na sua prova, sugeriu que pudesse existir outra interseção, por absurdo, além do vértice T. Utilizou paralelismo, a definição de parábola e o triângulo retângulo para concluir ser o vértice a única interseção entre a parábola e essa reta. Em seguida, provou que todos os pontos da reta são exteriores à parábola, seguindo a sua definição de tangente.

Vale comentar que ele não definiu o que é exterior e interior, mas conhecia claramente o seu significado, uma vez que a parábola divide o plano em duas regiões: interior seria a região onde está o foco e exterior, a outra região.

Essa proposição faz parte daqueles teoremas que chamaremos de "*visualmente perceptíveis*". Para quem tem mínima familiarização com a cônica, fica a forte intuição da validade do resultado pela simples observação de um desenho da curva e dos elementos.

## PROPOSIÇÃO III

***Um diâmetro sempre cruza a parábola em um único ponto** $P$*




Para prová-lo, utilizou a definição de parábola e a desigualdade triangular. Ela também é uma proposição visualmente perceptível.

Vale frisar que, embora o conceito de "Diâmetro" da parábola apresentado por La Hire pareça ser diferente do conceito de "Diâmetro" da elipse e da hipérbole que ele apresenta em seguida, eles são todos equivalentes. Isso é verdade, pois a parábola possui o centro e o segundo foco infinitamente distantes do primeiro foco, o que torna o diâmetro paralelo ao eixo que contém os focos, algo que não acontece com a elipse e a hipérbole. Assim, o diâmetro da parábola continua passando pelo centro e unindo dois pontos da cônica, exatamente como acontece com os diâmetros da elipse e na hipérbole.

## PROPOSIÇÃO IV

*Se o ponto $A$ é a projeção perpendicular do ponto $P$ da parábola sobre a diretriz, a mediatriz de $FA$ é tangente à parábola por $P$ (figura da proposição **3**).*

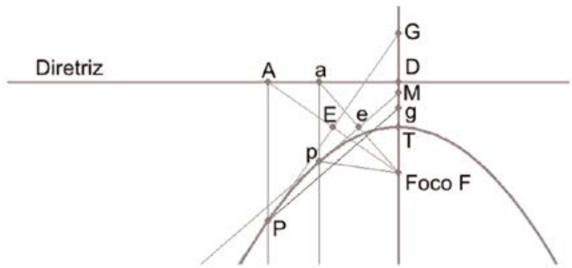
Provou inicialmente a unicidade da interseção (redução ao absurdo, usando a definição de parábola, a desigualdade triangular e o triângulo retângulo) e, em seguida, o fato de serem os pontos da reta exteriores à parábola, também por absurdo.

No corolário, afirmou serem congruentes os ângulos $FGE$, $FAD$, $APE$ e $FPE$. Igualmente, os ângulos $PAE$ e $AFD$. Por conseguinte, o triângulo $FPE$ é congruente ao triângulo $APE$ e o triângulo $PFG$ é isósceles de base $PG$.

Essa proposição será utilizada nas demonstrações das proposições V, VI e IX, como seu corolário nas proposições VII e VIII.

## PROPOSIÇÃO V

***Por um ponto $P$ da parábola só existe uma única reta tangente.***



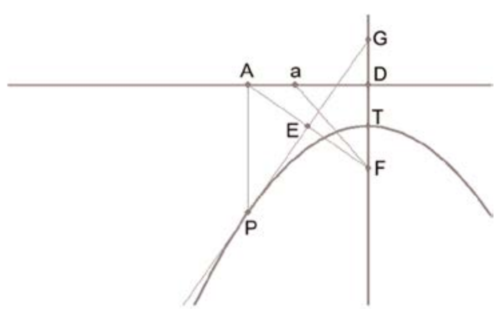

Ele provou por absurdo, supondo que exista uma segunda tangente por $P$. Mas utilizou o fato da parábola ser uma curva convexa algo que não foi provado.

É uma proposição visualmente perceptível.

No corolário, diz que uma reta tangente qualquer tem interseção com todos os diâmetros, com o eixo e com todas as outras tangentes.

## PROPOSIÇÃO VI

***Dado um ângulo menor que 90°, é sempre possível achar uma tangente por um ponto $P$ que forme com o eixo um ângulo $PGF$ menor que o ângulo dado.***



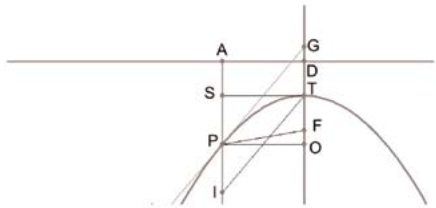

Na prova, utilizou a proposição IV. Ele a utilizará para provar a proposição XIII.

Esta proposição utilizou um fato já afirmado por La Hire na construção feita no início da obra: dado um ponto da parábola, sempre existirá outro mais distante do vértice que o primeiro. Além disso, enfatizou o fato de quanto mais distante do vértice estiver um ponto P da parábola, menor será o ângulo que a tangente por este ponto forma com o eixo.

La Hire não apresentou proposições análogas a esta para elipse e hipérbole, apesar de existirem.

## PROPOSIÇÃO VII

***Sendo $G$ a interseção da tangente por $P$ com o eixo e $O$ a projeção ortogonal de $P$ sobre o eixo, o vértice $T$ é o ponto médio do segmento $GO$.***




Na demonstração dessa proposição, fez uso do paralelismo das construções, da definição de parábola, do corolário da proposição IV e de subtração de quantidades iguais.

No corolário, conclui ser $P$ o ponto médio de $SI$ (sendo $S$ a projeção de T sobre o diâmetro por $P$ e I a interseção da reta paralela à tangente por $P$ que passa por $T$ e o diâmetro por $P$).

Essa proposição será utilizada nas provas das proposições X, XV e XVI.

## PROPOSIÇÃO VIII

***Uma tangente por $P$ forma com o diâmetro por $P$ e com a reta $PF$ ângulos congruentes (figura da proposição VII).***

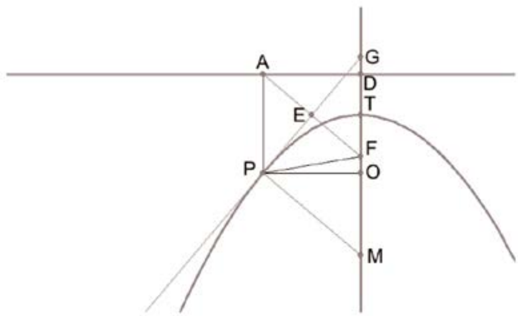
Na sua prova, usou ângulos opostos pelo vértice, o triângulo isósceles do corolário da proposição IV e a propriedade transitiva.

Na proposição, os ângulos eram agudos. No seu corolário, conclui novamente a congruência só que para ângulos obtusos.

Esta propriedade ressalta uma característica da parábola muito usada na física e com muitas aplicações práticas. Um raio de luz que chega paralelamente ao eixo de uma parábola, ao bater na superfície refletora parabólica, retorna obrigatoriamente pelo foco, qualquer que tenha sido o ponto P de contato. Se esses raios forem muito numerosos, o foco será um ponto de convergência de numerosos raios refletidos. Como exemplo, o receptor de ondas eletromagnéticas de uma antena parabólica e a lâmpada de um farol de um carro são colocados no foco comum das inúmeras parábolas formadas pela superfície refletora existente nos dois equipamentos. É então chamada de propriedade ótica.

## PROPOSIÇÃO IX

***O segmento $OM$ é metade do Parâmetro do Eixo (sendo $O$ a projeção perpendicular de $P$ sobre o eixo e $M$ a interseção da perpendicular à tangente por $P$ que passa por $P$ e o eixo).***



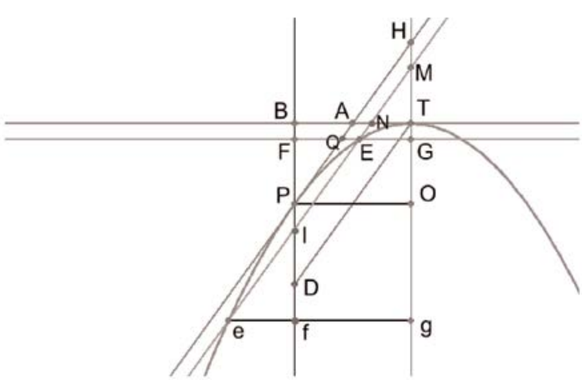

Utilizou o paralelismo, a proposição IV e a congruência entre os triângulos $ADF$ e $POM$ na prova desse proposição.

Esta proposição será utilizada para provar a proposição XVI.

## PROPOSIÇÕES X, XI E XII

***Nessas três proposições, são apresentadas congruências e/ou equivalência entre polígonos. As provas utilizam adição e subtração de polígonos equivalentes.***

**Na décima**: os triângulos $TAH$ e $BAP$ são congruentes.



Na sua demonstração, usou paralelismo e a proposição **VII**.

No seu corolário, afirma serem equivalentes os polígonos *TDB* e *TDPH,* assim como *TOPB* e *POH*.

Esta proposição será usada nas proposições XI e XII.

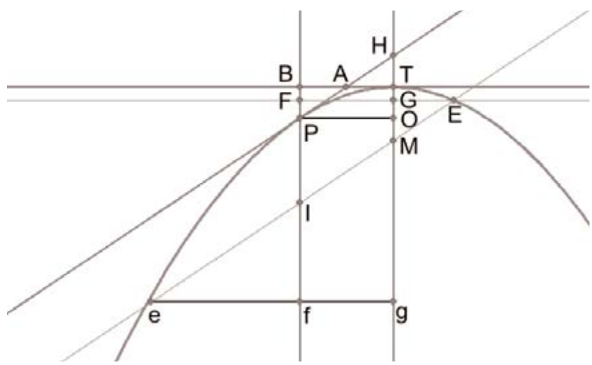
**Na décima primeira:** *o triângulo EGM é equivalente ao quadrilátero GTBF. (figura da proposição* ***10****).*

Na sua demonstração, utilizou paralelismo, semelhança entre os triângulos *EGM* e *POH* e os corolários das proposições I e X.

Analogamente, demonstrou que *egM* é equivalente ao quadrilátero *TgfB*.

Esta proposição será usada na proposição XII.

**Na décima segunda:** *o triângulo EFI é equivalente ao paralelogramo PIMH*.




Na sua demonstração, fez uso das proposições X e XI. Provou o mesmo resultado para três possíveis localizações do ponto E da parábola: a primeira que está na figura da proposição 10 e as outras duas mostradas nesta figura.

Analogamente mostrou que efI é equivalente ao paralelogramo *PIMH*.

Esta proposição será usada nas proposições XIII e XIV.

## PROPOSIÇÃO 13

*Se for traçada uma reta secante à parábola e paralela à tangente PH pelo ponto E da parábola, então esta reta encontrará a parábola em outro ponto e. Além disso, o segmento EI é igual ao Ie, sendo I pertencente ao diâmetro PI (figura da proposição* ***XII****).*

Na demonstração da primeira parte, fez uso do paralelismo, da definição de tangente e da proposição VI. Na segunda parte, usou a transitividade decorrente da proposição XII. Outra forma de enunciar a 2ª parte desta proposição seria:

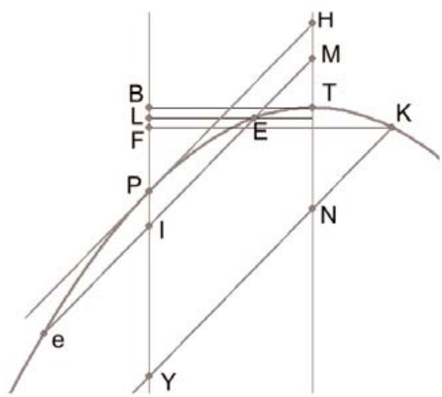
um segmento paralelo à tangente por P e limitado pela parábola (no círculo chamaríamos de corda) é dividido ao meio pelo diâmetro por $P$.

Esta proposição será usada nas proposições XV e XVI.

Definiu "Ordenada de um Diâmetro", que generaliza o conceito de "Ordenada de um Eixo", sendo que não se verifica mais a perpendicularidade entre eles nesse caso geral.

## PROPOSIÇÃO XIV

***Os quadrados das ordenadas $EI$ e $KY$ de um mesmo diâmetro por P estão um para o outro, assim como as partes deste diâmetro $PI$ e $PY$.***




Na sua demonstração, usou semelhança de triângulos e a proposição **XII.**

No corolário, afirmou que o quadrado da ordenada de um diâmetro é equivalente ao retângulo de lados iguais à sua respectiva parte do diâmetro e ao parâmetro desse diâmetro.

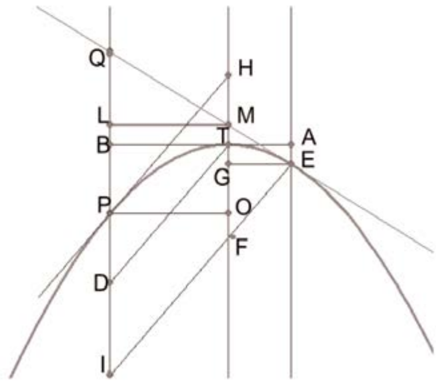
Este corolário será usado na proposição XVI.

Definiu "Parâmetro de um Diâmetro" como a razão entre o quadrado de uma ordenada e sua respectiva parte do diâmetro.

Essa proposição nada mais é do que uma generalização da primeira proposição, ou seja, conclui que o quadrado de uma ordenada é igual ao produto da sua respectiva parte do diâmetro pelo parâmetro, sejam eles relativos a um diâmetro qualquer ou ao diâmetro especial que é o eixo. Como o eixo pode ser visto como um caso particular de diâmetro, então se constata a generalização.

## PROPOSIÇÃO XV

***O ponto da parábola $P$ é o ponto médio do segmento $IQ$.***

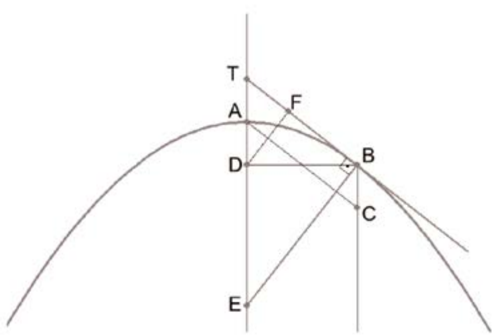



Na sua demonstração, usou o corolário 3 da proposição 1, a semelhança dos triângulos $BTD$ e $GEF$ como também $QLT$ e $GEM$ e as proposições XII e XIII.

Esta proposição é uma generalização da sétima proposição. Ela pode ser assim enunciada: uma tangente por $E$ e uma ordenada ($//$ à esta tangente) concorrentes num mesmo ponto E da parábola interceptam o diâmetro por $P$ em dois pontos cujo ponto médio é $P$. Quando o ponto $P$ coincide com o vértice $T$, a proposição XV vira a proposição VII.

## PROPOSIÇÕES XVI E XVII

***O parâmetro do diâmetro por P excede o parâmetro do eixo em 4 . TO.***




La Hire (ou talvez Robinson) mostrou propriedades do parâmetro do diâmetro nestas duas proposições.

**Na décima sexta**, mostra a relação do Parâmetro do Diâmetro com o Parâmetro do Eixo.

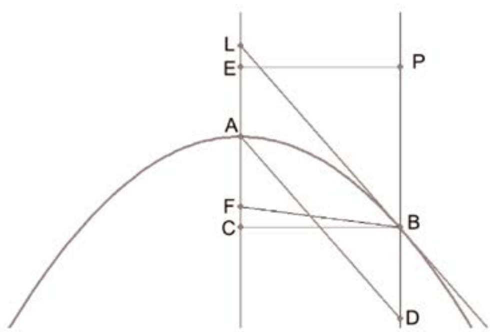
Na prova, fez uso de semelhança de triângulos *BDT* e *BFD* como também *EBT* e *DFT* e as proposições I, VII, IX, XIII e o corolário da XIV. Ela será utilizada na proposição XVII.

No corolário, conclui que quanto mais distante estiver um diâmetro do eixo maior será o seu parâmetro.

Esta proposição será usada na proposição XVII.

**Na décima sétima**, apresentou uma visualização geométrica para o Parâmetro do Diâmetro.

***O segmento que une um ponto B da parábola ao foco é ¼ do parâmetro do diâmetro por P.***




Na prova, utilizou a definição de parábola, a proposição 16 e o corolário da 2 da proposição 1.

No corolário, afirmou que, uma vez conhecida a parábola, este teorema apresenta uma forma muito simples de se achar o parâmetro de qualquer diâmetro.

## PARTE 2 - A ELIPSE

La Hire definiu a elipse no plano através da propriedade da soma constante das distâncias dos pontos da curva a dois pontos dados (focos). Essa soma é igual ao segmento dado *IT*.

Fez uma construção que obtém dois pontos *P* e *P'* da elipse através da interseção de dois círculos centrados nos focos e com raios que somados valem *IT.*

Afirmou que o segmento *IT* é perpendicular ao segmento PP', percebendo que o segmento *IT* funciona como um eixo de simetria, embora não utilize esse termo. Diz que o ponto *T* pertence à curva, deixando claro o seu conhecimento desse ponto especial hoje chamado vértice, embora não utilize nenhum termo específico para ele.

A seguir, veio uma série de definições. Chamou a curva construída de "**Elipse"** e diversos elementos geométricos que podem ser evidenciados na construção: ***o*** **Centro *C*** como o ponto médio do segmento $IT$***, o Grande*** **Eixo** como aquele segmento $IT$ usado na definição (hoje comumente chamado "Eixo Maior" e chamado por Robinson "Eixo Transversal")***, o Pequeno*** **Eixo** $MN$ como o segmento perpendicular ao Grande Eixo que contém o centro e é limitado pela elipse (hoje comumente chamado "Eixo Menor" e chamado por Robinson "Eixo Conjugado")***, os*** **Focos** $F$ *e* $D$ como aqueles pontos usados na definição de elipse***, as*** **Ordenadas de um Eixo** como os segmentos perpendiculares ao eixo limitados pela elipse e pelo eixo**, os Diâmetros** como os segmentos que passam pelo centro e unem dois pontos da elipse **e as Tangentes** como as retas exteriores à elipse que a cruzam em apenas um ponto.

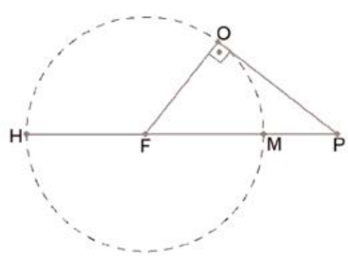
Ao contrário da parábola, ele parece não ter definido a tangente como uma reta que contém apenas pontos exteriores, exceto o ponto de tangência, apesar de obviamente conhecer essa característica. Nas demonstrações, onde provou que determinada reta é uma tangente, ele não demonstrou que tal reta é exterior.

O texto contém 20 proposições, 2 Lemas e mais 6 definições sobre a elipse: **Parâmetro do Eixo, Figura do Eixo**, **Diâmetros Conjugados**, **Ordenada de um Diâmetro** e **Parâmetro do Diâmetro e Figura de um Diâmetro**. Estas proposições, lemas e definições serão descritas a seguir.

## LEMA 1

***Sejam o círculo de centro F e raio FO, o ponto P externo ao círculo, os pontos H e M interseções da reta PF com o círculo. Então:***

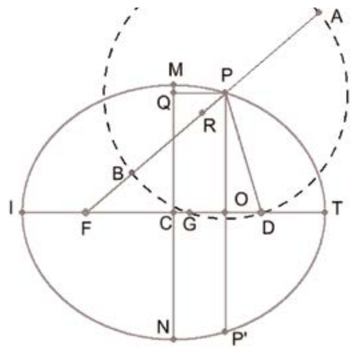
$$\underbrace{(FP+FO)}_{PH}\cdot\underbrace{(FP-FO)}_{PM}=PO^2$$




Este lema é um resultado que chamamos hoje de Teorema de Pitágoras, mas aplicado ao círculo vira o conceito atual de "Potência de um Ponto" em relação ao círculo.

## PROPOSIÇÃO I

*O quadrado do semi-eixo maior **CT** da elipse está para o produto das partes do eixo maior **IT** formadas pelo extremo **O** da ordenada **PO** assim como o produto das partes do eixo maior **IT** formadas pelo foco **D** está para o quadrado da ordenada **PO** do eixo maior, ou seja,* $\frac{CT^2}{IO \cdot OT} = \frac{ID \cdot DT}{PO^2}$




É a prova mais longa entre todas as proposições sobre elipse. Sua demonstração utilizou a definição de elipse, o lema 1, diversas propriedades de proporção e multiplicação de quantidades iguais.

Essa proposição será usada nas proposições II, III e IV.

Equivale à proposição I de parábola (será mostrado na proposição I de hipérbole).

Esta proposição dá origem à equação analítica usual da elipse, pois $CT$ é o semi-eixo maior $a$, $PO = y$ (ordenada), $ID \,.\, DT$ é o quadrado do semi-eixo menor $b$ (proposição 2) e $CO = x$ (abscissa). Substituindo:

$$\frac{a^2}{(a+x)(a-x)} = \frac{b^2}{y^2} \rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

## PROPOSIÇÃO II

***O produto das partes do eixo maior** $IT$ **formadas pelo foco D é igual ao quadrado do semi-eixo menor** $CM$**, ou seja,** $ID \,.DT = CM^2$*

***(figura da proposição I).***

A prova é imediata a partir da proposição 1 quando a ordenada do eixo maior coincide com o semi-eixo menor, ou seja, quando $P$ coincide com $M$.

Em linguagem atual, $(a + c) \cdot (a - c) = b^2$, o que resulta na relação Pitagórica entre os parâmetros $a$ (semi-eixo maior), $b$ (semi-eixo menor) e $c$ (metade da distância focal): $a^2 = b^2 + c^2$. Essa proposição será usada nas proposições III e IV.

## PROPOSIÇÕES III E IV

***O quadrado de um eixo da elipse está para o quadrado do outro eixo, assim como o quadrado de uma ordenada deste último eixo está para produto das partes deste eixo formadas pelo extremo desta ordenada (figura da proposição 1).***

Na proposição III, a ordenada $PO$ do Eixo Maior: $\frac{NM^2}{IT^2} = \frac{PO^2}{IO \cdot OT}$

Na proposição IV, a ordenada $PQ$ do Eixo Menor: $\frac{PQ^2}{NQ \cdot QM} = \frac{IT^2}{NM^2}$

A prova da terceira proposição combinou as duas primeiras proposições.

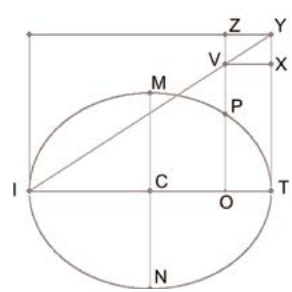
A prova da quarta também usou as mesmas proposições, além de usar paralelismo e propriedades de uma proporção.

A proposição III será usada nas proposições V e XIV, enquanto a IV será usada na XII.

La Hire definiu "Parâmetro $YT$ de um Eixo" (figura seguinte) como a razão entre o quadrado do outro eixo e o seu eixo. Em seguida, "Figura de um Eixo" como o retângulo cujos lados são este Eixo e o seu Parâmetro. Note que a definição de Parâmetro da elipse é aparentemente diferente da que foi usada na parábola. Veremos, mais adiante, na definição de parâmetro da hipérbole que as três definições são equivalentes.

## PROPOSIÇÃO V

***O quadrado cujo lado é a ordenada $PO$ somado com o retângulo $VXYZ$ (que é semelhante à figura do eixo $IT$) é equivalente à figura $IY$ que é o retângulo de lados $IT$ e $TY$, ou seja, $PO^2 = VO \cdot OT$***



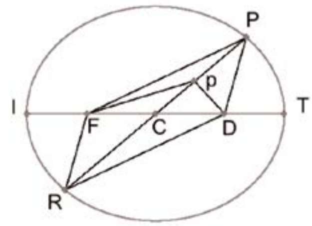

A sua demonstração usou a proposição III, a definição de parâmetro, a semelhança entre os triângulos $IVO$ e $IYT$ e a propriedade transitiva.

Esta proposição vem a ser aquela que, segundo Vicenzo Bongiovanni em sua tese de doutorado [1], foi utilizada por Apolônio para justificar a origem do termo "Elipse". Em grego, significa "falta" e foi usado por Euclides em "Os elementos" para expressar a idéia de uma área menor que a de uma figura dada. No nosso caso, o quadrado cujo lado é a ordenada é menor que o retângulo cujos lados são uma parte do eixo entre o vértice e o extremo da ordenada e o seu parâmetro. O próprio Philippe de La Hire faz um comentário sobre as três cônicas a partir dessa propriedade, no prefácio da sua obra.

Este resultado pode ser comparado com a proposição I de parábola ($PO^2 = TO \cdot TY$), da seguinte forma: o quadrado da ordenada $PO$ é menor que o produto da projeção $TO$ pelo parâmetro $TY$.

## PROPOSIÇÃO VI

***Todos os diâmetros são divididos ao meio pelo centro $C$.***



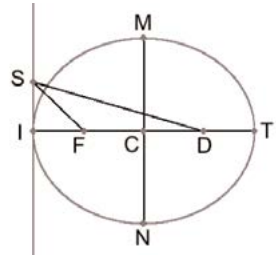

Ele provou por absurdo, supondo que $C$ não fosse o ponto médio, mas sim $p$. Entretanto, para completar a sua prova, seria necessário um lema que limitasse a dois pontos as interseções entre uma reta e a elipse.

Essa proposição será usada na proposição XVII.

Equivale à proposição III de parábola, pois se mantivermos fixos o foco F da elipse e seu vértice mais próximo $I$ e afastarmos o seu centro $C$ de um ponto $P$ da elipse que tenha ordenada constante, geraremos outras elipses. Se afastarmos infinitamente, a elipse vira uma parábola e esse diâmetro passa a ter uma única interseção com a cônica e ficará paralelo ao eixo, resultando na proposição III de parábola.

## PROPOSIÇÃO VII

***Uma reta perpendicular ao eixo maior IT, que cruza sua extremidade I, tangencia a elipse neste ponto I.***



Ele demonstrou, por absurdo, que a interseção é única, usando a definição de elipse e a propriedade do triângulo retângulo.

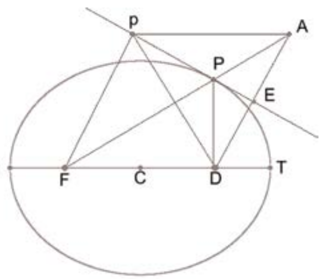
Se ele tivesse definido tangente como fez na parábola, faltaria provar que todos os pontos desta reta são exteriores.

Ela equivale à proposição II de parábola.

Esta proposição é uma daquelas que chamamos de "visualmente perceptível".

## PROPOSIÇÃO VIII

***A mediatriz do segmento $DA$ é tangente à elipse no ponto $P$ (sendo $F$ e $D$ focos e $A$ o prolongamento de $FP$ com $PA = PD$).***

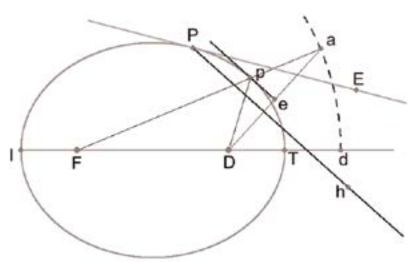



Ele provou, por absurdo (supôs que o ponto p fosse um segundo ponto da elipse), que a interseção é única, usando a definição de elipse, o triângulo isósceles $pAD$ e a desigualdade triangular. Se ele tivesse definido tangente como fez na parábola, faltaria provar que todos os pontos desta reta são exteriores.

Esta proposição equivale à proposição IV de parábola. A diferença está na localização do ponto $A$: na parábola está sobre uma reta e na elipse está sobre um círculo (La Hire assim afirmou na proposição IX). Atualmente, o denominamos "Círculo Diretor". Quando a elipse vira uma parábola, o raio do "Círculo Diretor" cresce infinitamente, transformando-o numa reta (diretriz).

## PROPOSIÇÃO IX

***A tangente à elipse que passa pelo ponto P é única.***



Ele provou, por absurdo (supôs que o ponto $Ph$ fosse a segunda tangente), que a interseção é única, utilizando paralelismo, congruência de triângulos e as definições de elipse e tangente. La Hire usou também o fato da elipse ser convexa (quando afirmou: "*a linha $Ph$ paralela à pe encontrará necessariamente as linhas $Fp$ e $Dp$ no interior da elipse*"), algo que não foi provado no seu texto.

Ela equivale à proposição V de parábola.

Durante a prova, ele utilizou um círculo que vem a ser o "Círculo Diretor" da elipse (círculo de centro em um dos focos e raio igual ao segmento de referência $IT$). Embora não o tenha definido nem explorado, resta a desconfiança que ele já conhecia alguma coisa sobre as propriedades excepcionais desse círculo que se transforma na reta diretriz no caso da parábola

## PROPOSIÇÃO X

***A tangente por um ponto $P$ da elipse forma com os segmentos que unem $P$ aos focos (hoje chamados raios vetores) ângulos congruentes (figura da proposição 8).***

Na sua prova, usou a definição de elipse, ângulos opostos pelo vértice, o triângulo isósceles $DPA$ e a propriedade transitiva.

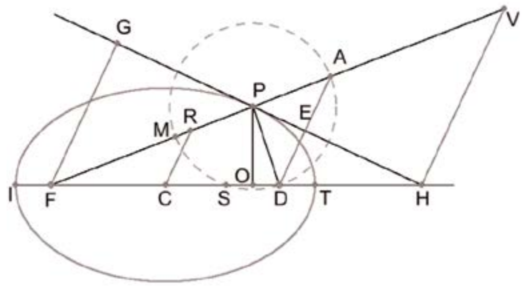
No corolário, afirmou que os ângulos $EPF$ e $DPp$ são congruentes.

Ela equivale à proposição VIII de parábola, sendo que o foco $D$ da parábola está sobre o diâmetro $PI$ e infinitamente distante do foco $F$.

Esta propriedade ressalta uma característica da elipse usada na física e com aplicações práticas. Se uma fonte de luz for colocada em um dos focos da elipse, os raios de luz emitidos refletirão na superfície refletora elíptica e voltarão todos na direção e no sentido do outro foco, qualquer que tenha sido o ponto $P$ da elipse. O outro foco será o ponto mais bem iluminado da região, formando uma imagem real. Essa propriedade é conhecida, então, como propriedade ótica.

## PROPOSIÇÕES XI E XII

***O semi-eixo é a média geométrica entre os segmentos que vão do centro $C$ até as interseções do eixo com a ordenada por P e com a tangente que passa por $P$.***

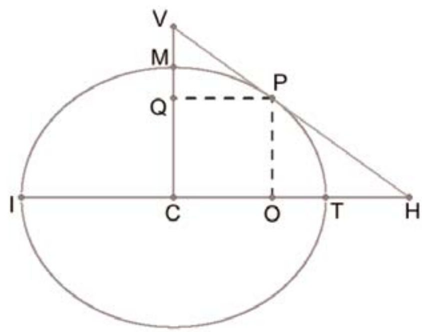



Na proposição XI, sendo o segmento CT o semi-eixo maior: $\frac{CO}{CT} = \frac{CT}{CH}$

Na demonstração da proposição XI, ele utilizou a definição de elipse, o lema I, a semelhança dos triângulos $FPG$ e $PAE$, $FGH$ e $DEH$, $FAD$ e $FVH$, o Teorema de Tales e propriedades de proporção. No seu corolário, afirmou que os pontos $O$ e $T$ dividem harmonicamente o segmento $IH$, ou seja, $IO \,.\, TH = IH \,.\, OT$.

Esta proposição será usada nas proposições XII e XIII.

Na proposição XII, sendo o segmento CM o semi-eixo menor: $\frac{CQ}{CM} = \frac{CM}{CV}$




Já na demonstração da proposição XII, usou as proposições IV e XI, semelhança dos triângulos $VQP$ e $VCH$ e propriedades de proporção.

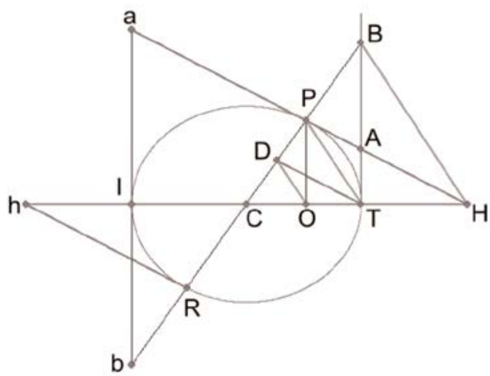
A proposição XI equivale à proposição 7 de parábola. Se manipularmos o resultado $\frac{CO}{CT} = \frac{CT}{CH}$ da elipse, podemos dar origem à propriedade $TO = TH$ da parábola. Fazendo: $CT^2 = (CT + TH)\,(CT - TO) \rightarrow CT \,.\, TH = CT \,.\, TO + TO \,.\, TH \rightarrow TH = TO + \frac{TO \cdot TH}{CT}$ . Fazendo o limite dessa expressão quanto $CT$ tende ao infinito, temos que $\lim_{CT \to \infty} TH = \lim_{CT \to \infty} \left( TO + \frac{TO \cdot TH}{CT} \right)$ e assim $TH = TO$ que é a proposição VII de parábola.

O corolário da proposição XI foi o único momento da parte de elipse onde La Hire usou a divisão harmônica, ferramenta que foi utilizada com muito mais intensidade na suas obras de 1673 e 1685.

## PROPOSIÇÕES XIII, XIV E XV

***Nessas três proposições, são apresentadas equivalências entre polígonos. As provas utilizam adição e subtração de áreas iguais, entre outras coisas.***

Na décima terceira: os triângulos *PAB* e *TAH* são equivalentes.




Na sua demonstração, usou paralelismo, semelhança de triângulos *COP* e *CTB* e a proposição XI.

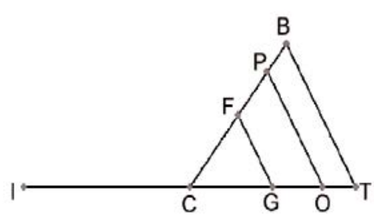
No corolário 1, afirmou serem equivalentes os triângulos *PDT* e *POT*, os triângulos *CTB* e *CPH*, os quadriláteros *POTB* e *PDTH* e os triângulos *POH* e *DTB*.

No corolário 2, afirmou serem equivalentes os triângulos *CIb* e *CPH*, assim como os triângulos *Pab* e *IaH*. Além disso, a reta *Rh* é paralela à *PH,* ou seja, as tangentes que passam pelas extremidades de um mesmo diâmetro são paralelas entre si.

Seus corolários serão usados nas proposições XIV e XV.

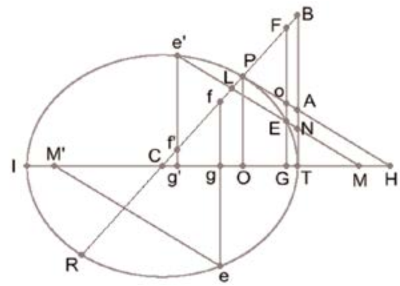
Ela equivale à proposição X de parábola.

No lema II, mostrou uma proporção entre dois retângulos e dois trapézios: *o Sendo o segmento CI igual ao CT e os segmentos OP e FG paralelos ao* ***TB****, então o retângulo IOT* **:** *retângulo IGT* **::** *trapézio POTB* **:** *trapézio FGTB.*




Na sua demonstração, utilizou semelhança de triângulos e propriedades de proporção. Este lema será usado na proposição XIV e XVII.

**Na décima quarta**: *o triângulo EGM é equivalente ao quadrilátero GTBF.*



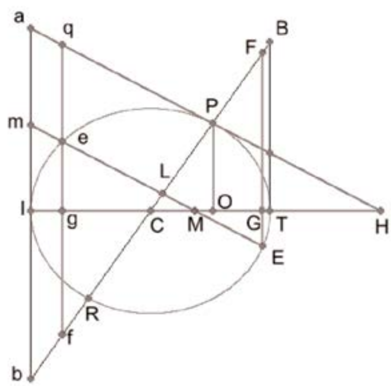

Na sua demonstração, utilizou semelhança de triângulos *POH* e *EGM*, a proposição III, o corolário 2 da proposição XIV e o lema II.

Essa proposição será usada na proposição XVII.

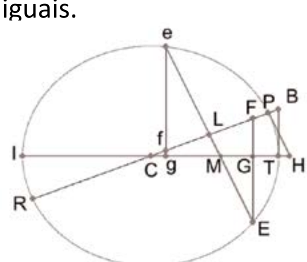
**Na décima quinta**: o triângulo *ELF* é equivalente ao quadrilátero *LPHM*.

Faz a demonstração análoga para o ponto *E* em duas outras posições.

Ela equivale à proposição XI de parábola.




Na sua demonstração, fez uso do corolário 1 da proposição 13 e da subtração de quantidades iguais.



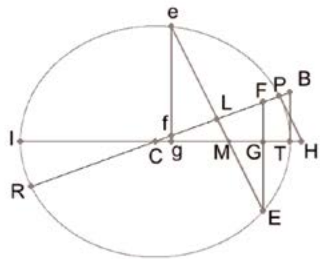

Fez a demonstração análoga para o ponto *E* em cinco outras posições. E indica que outras posições utilizam as demonstrações já mostradas.

Essa proposição será usada nas proposições XVI e XVII.

Ela equivale à proposição XII de parábola.

## PROPOSIÇÃO XVI

***Todos os segmentos de extremos na elipse (cordas) paralelos a uma tangente por $P$ são divididos ao meio pelo diâmetro por $P$.***




Na sua demonstração, fez uso da semelhança entre os triângulos $ELF$ e $efL$ e da proposição XV.

É análoga à segunda parte da proposição XIII de parábola.

Essa proposição será usada nas proposições XVIII e XX.

Esta proposição cria as condições para a definição dos "Diâmetros Conjugados".

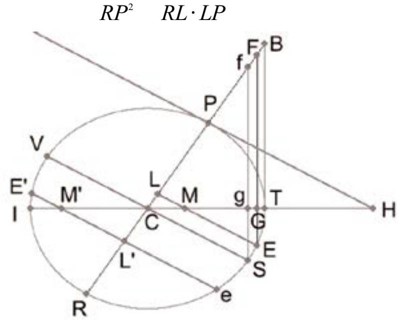
Outra forma de enunciar esta proposição seria: um segmento paralelo à tangente por P e limitado pela elipse (corda) é dividido ao meio pelo diâmetro por $P$.

## PROPOSIÇÕES XVII E XVIII

***O quadrado do diâmetro por um ponto $P$ da elipse está para o quadrado do diâmetro paralelo à tangente por $P$ assim como o quadrado da ordenada deste último diâmetro está para produto das partes deste diâmetro formadas por esta ordenada.***

**Na proposição XVII**, sendo a ordenada $EL$ paralela à tangente por $P$, então:

$$\frac{VS^2}{RP^2} = \frac{EL^2}{RL \cdot LP}$$



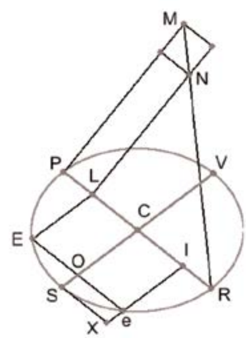
Na sua demonstração, fez uso da semelhança dos triângulos $CSf$ e $LEF$, das proposições VI, XIV e XV, do lema II e da propriedade transitiva.

Essa proposição será usada nas proposições XVIII, XIX e XX.

**A proposição XVIII** afirmou que $EO = eO$.

Disse ainda que se a ordenada $EO$ for paralela ao diâmetro por $P$, então:

$$\frac{RP^2}{VS^2} = \frac{EO^2}{VO \cdot OS}$$




Na sua demonstração, usou as proposições XVI e XVII e uma propriedade de uma proporção.

Seu corolário diz que a reta paralela à ordenada $EO$ que passa por $V$ ou $S$ é tangente à elipse, mas não faz a prova.

Essa proposição será usada na proposição XIX.

A primeira parte da proposição XVIII é análoga à segunda parte da proposição XIII de parábola.

Definiu **Diâmetros Conjugados** $RP$ e $VS$, **Ordenada** $EL$ **do Diâmetro** $RP$ **e Ordenada** $EO$ **do Diâmetro** $VS$, **Parâmetro** $PM$ de um diâmetro, **Figura** de um diâmetro.

Essas duas proposições nada mais são do que uma generalização das proposições III e IV de elipse, pois quando os diâmetros passam pelo vértice eles são os eixos da elipse.

Na elipse, a definição de o parâmetro $PM$ do diâmetro $RP$ (= $VS^2$ / $RP$) se transforma na definição de "Parâmetro de um Diâmetro" de parábola quando, pela junção com a proposição XVII de elipse:

$$PM = \frac{EL^2 \cdot RP}{RL \cdot LP} = \frac{EL^2 \cdot RP}{RP \cdot LP - LP^2} = \frac{EL^2}{LP - LP^2 / RP}$$

Quando fazemos RP tender para o infinito, teremos: $PM = EL^2 / LP$ que nada mais que a razão entre o quadrado da ordenada $EL$ e a projeção de $E$ sobre o eixo $RP$ (definição de "Parâmetro" da parábola).

## PROPOSIÇÃO XIX

***O quadrado da ordenada** EL **somado com o retângulo** MN **(que é semelhante à figura** LM **do diâmetro** VS**) é equivalente ao retângulo** LM**, ou seja,** $EL^2 = PL \,.\, LN$ **(figura da proposição XVIII).***

Na sua demonstração, usou a semelhança dos triângulos *RPM* e *RLN*, as proposições XVII e XVIII e a propriedade transitiva.

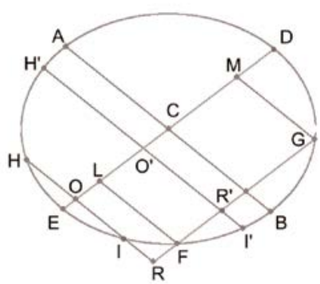
Esta proposição generaliza a proposição V da elipse, quando o diâmetro vira um eixo.

Ela equivale ao corolário da proposição 14 de parábola.

## PROPOSIÇÃO XX

***Se dois segmentos** HI **e** FG**, limitados pela elipse, são paralelos aos dois diâmetros conjugados AB e DE se cruzam em R, então o retângulo** $HR \,.RI$ **:** **retângulo** $FR \,.RG$ **::** $AB^2$ **:** $DE^2$**.***

Sua prova utilizou a proposição XVII, além de propriedades de proporção e a propriedade transitiva.




Esta proposição pode ser considerada uma generalização para o conceito de "Potência de um Ponto" em relação a um Círculo. A expressão $HR \,.\, RI / AB^2$ seria a potência do ponto *R* em relação à elipse, sendo *AB* um diâmetro e *HRI* um segmento paralelo a esse diâmetro limitado pela elipse. Esse ponto *R* pode ser interior ou exterior à elipse.

Existem duas situações para a elipse onde os diâmetros conjugados são iguais *(AB = DE)*: quando a elipse vira um círculo (todos os seus diâmetros são iguais) e quando os diâmetros da elipse são simétricos entre si em relação aos eixos da elipse. Nesses casos, os retângulos $HR \,.\, RI$ *e* $FR \,.\, RG$ serão equivalentes.

# PARTE 3 - A HIPÉRBOLE

La Hire definiu a hipérbole no plano através da propriedade da diferença constante entre as distâncias dos pontos da curva a dois pontos dados (Focos). O valor dessa diferença é dado por um segmento IT.

Fez uma construção que obtém dois pontos P e p no mesmo ramo hipérbole através da interseção de dois círculos com centro nos focos e com raios cuja diferença vale IT. Visualiza dois ramos distintos da hipérbole.

Ao afirmar que a reta IT é perpendicular ao segmento Pp, percebe que a reta IT funciona como um eixo de simetria, embora não utilize esse termo. Ao dizer que o ponto T pertence à curva, evidencia o seu conhecimento desse ponto especial hoje chamado vértice, embora não utilize também nenhum termo para ele.

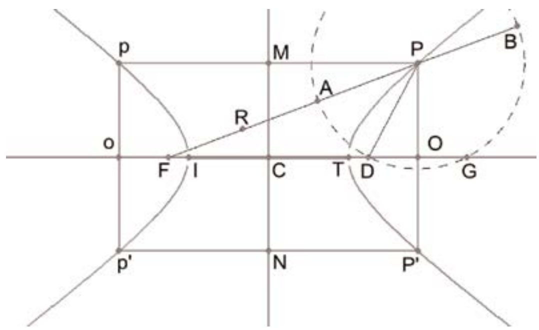
A seguir, veio uma série de definições. Chamou a curva construída por "**Hipérbole"** e diversos elementos geométricos que podem ser evidenciados na construção: o **Centro** $C$ como o ponto médio do segmento $IT$**,** o **Eixo Determinado** como aquele segmento $IT$ usado na definição (Chasles [4] chamava "Eixo Transverso" e hoje também conhecido como "Eixo Real")**,** o **Eixo Indeterminado** $MN$ como a reta perpendicular ao Eixo Determinado que passa pelo centro (Chasles chamava "Eixo Conjugado" e hoje também conhecido como "Eixo Imaginário")**,** os **Focos** $F$ *e* $D$ como aqueles pontos usados na definição de hipérbole**,** as **Ordenadas de um Eixo** como os segmentos perpendiculares ao eixo limitados pela hipérbole e pelo eixo**,** os **Diâmetros (Determinado e Indeterminado)** como as retas que passam pelo centro **e a Tangente** como as retas exteriores à hipérbole que a cruzam em apenas um ponto**.**

O texto contém 24 proposições e mais 7 definições sobre a hipérbole: **Parâmetro do Eixo, Figura do Eixo**, **Assíntotas**, **Diâmetros Conjugados**, **Ordenada de um Diâmetro** e **Parâmetro do Diâmetro e Figura de um Diâmetro**. Estas proposições e definições serão descritas a seguir.

## PROPOSIÇÃO I

***O quadrado da ordenada $PO$ do eixo determinado está para o produto das partes do eixo determinado formadas pelo extremo $O$ da ordenada assim como o produto das partes do eixo determinado formadas pelo foco $D$ está para o quadrado do semi-eixo determinado $CT$ da hipérbole***

$$\frac{PO^2}{IO \cdot OT} = \frac{ID \cdot DT}{CT^2}$$




É a prova mais longa entre todas as proposições sobre hipérbole. Utilizou a definição de hipérbole, o lema I de elipse, diversas propriedades de proporção e multiplicação de quantidades iguais. Esta proposição e sua prova são idênticas à proposição I de elipse.

Essa proposição será usada nas proposições III e IX.

Esta proposição dá origem à equação analítica atual da hipérbole, pois $CT$ é o semi-eixo real $a$, $PO = y$ (ordenada), $ID \cdot DT$ é o quadrado do semi-eixo imaginário $b$ e $CO = x$ (abscissa). Substituindo, obtém-se:

$$\frac{y^2}{(x+a)(x-a)} = \frac{b^2}{a^2} \rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2} \rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Entendendo a parábola como o limite de uma elipse ou de uma hipérbole quando um dos focos se afasta infinitamente do outro, pode ser mostrado que esta proposição equivale à proposição I de parábola. Se invertermos os extremos da proporção, multiplicarmos por 4, o numerador e denominador do lado esquerdo da equação e fizermos as seguintes trocas:

$2 \,.\, CT$ por $ID + DT$ e $IO = ID \pm DO$, então $\dfrac{(ID + DT)^2}{4 \cdot (ID \pm DO) \cdot OT} = \dfrac{ID \cdot DT}{PO^2}$

Logo, $(ID + DT)^2 \cdot PO^2 = 4 \cdot ID \cdot DT (ID \pm DO) \cdot OT$. Dividindo por $ID^2$, obteremos:

$$PO^2\left(1 + \frac{2DT}{ID} + \frac{DT^2}{ID^2}\right) = 4 \cdot OT \cdot DT\left(1 \pm \frac{DO}{ID}\right)$$

Se afastarmos o vértice *I* infinitamente do foco *D* e do vértice *T*, ou seja, se fizermos o limite da expressão acima quando *ID* tende para infinito, então

$$\lim_{ID\to\infty} PO^2\,(1+2.\frac{DT}{ID}+\frac{DT^2}{ID^2}) = \lim_{ID\to\infty} 4.OT.DT\,(1\pm\frac{DO}{ID}) \to \quad PO^2 = 4\,DT\,.\,OT$$

Este resultado vem a ser a proposição I da parábola.

## PROPOSIÇÃO 2

***O eixo indeterminado $NM$ divide o segmento $PP'$, paralelo ao $IT$, em partes iguais (figura da proposição I).***

A prova da proposição usou a própria construção da hipérbole para concluir a igualdade entre $PM$ e $MP'$. Poderíamos justificar essa igualdade de segmentos através da congruência dos triângulos $FDP$ e $FDp$.

Essa proposição será usada na proposição IV.

Na construção da elipse e da hipérbole, ele afirmou (com outras palavras) ser o segmento $IT$ um eixo de simetria (não o faz para a parábola, por isso criamos a proposição XVIII de parábola).

Na elipse, entretanto, ele não afirmou ser o Eixo Menor um eixo de simetria, mas deu várias pistas, deixando claro que conhecia essa propriedade. Por isso, no capítulo das novas proposições, será feita essa prova para a elipse (prop. 21).

Já na hipérbole, ele criou essa proposição que faz do Eixo Indeterminado um eixo de simetria, pois a utilizará na proposição IV.

Em seguida, definiu Parâmetro de um Eixo Determinado como a razão entre o quádruplo da área do retângulo de lados $ID$ e $DT$ e o eixo determinado $IT$. Definiu, logo após, Figura de um Eixo como o retângulo cujos lados são o Eixo e seu Parâmetro.

Essa definição de Parâmetro do Eixo Determinado da hipérbole, $\frac{4\cdot ID\cdot DT}{IT}$ embora pareça diferente, é a mesma que foi usada para o Parâmetro do Grande Eixo da elipse (Parâmetro do Eixo $IT = \frac{NM^2}{IT}$), pois pela proposição II de elipse $NM^2 = 4\,.\,ID\,.\,DT$. Mas como ele não definiu (para a hipérbole) $NM$ como um segmento especial, então preferiu utilizar o retângulo de lados $ID$ e $DT$, que foi o mesmo do qual partiu na elipse. Para a parábola, essa definição também vale, pois $\frac{4\cdot ID\cdot DT}{IT} = \frac{4\cdot(IT\pm DT)\cdot DT}{IT} = 4\cdot DT \pm \frac{4\cdot DT^2}{IT}$ (sendo o mais para hipérbole e o menos para a elipse). Fazendo o limite da expressão quando $IT$ tende para infinito, o parâmetro fica igual a $4\,.\,DT$ o que vem a ser a definição de parâmetro dada para a parábola por La Hire. Assim, pode-se afirmar que a definição de parâmetro vale para as três cônicas.

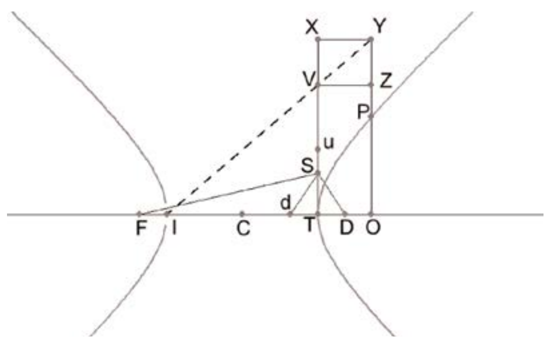
Em linguagem moderna, o parâmetro seria $\frac{4 \cdot ID \cdot DT}{IT} = \frac{4 \cdot (a+c) \cdot |a-c|}{2a}$ .

Na elipse, como $a > c$, então $|a-c| = a-c$ . Então existe um triângulo retângulo de catetos $b$ e $c$ e hipotenusa a e $(a + c)\ (a - c) = b^2$. O parâmetro fica $\frac{2 \cdot b^2}{a}$. Na hipérbole, como $c > a$, então $|a-c| = c-a$ . Então existe um triângulo retângulo de catetos b e a e hipotenusa $c$ e $(a + c)\ (c - a) = b^2$.
O parâmetro fica $\frac{2 \cdot b^2}{a}$ .

Na parábola, como a e c tendem para o infinito, então o parâmetro do eixo fica $\frac{4 \cdot (2a \pm DT) \cdot DT}{2a} = 4 \cdot DT \pm \frac{2DT^2}{a}$. Fazendo o limite com a tendendo para o infinito, o parâmetro fica $4 \,.\, DT$.

## PROPOSIÇÃO III

***O quadrado de lado $PO$ subtraído do retângulo $VXYZ$ (que é semelhante à figura do eixo $IT$) é equivalente ao retângulo de lados $TO$ e o parâmetro $TV$), ou seja,*** $PO^2 = TX \,.\, TO$




A demonstração dessa proposição usou a semelhança entre os triângulos $ITV$ e $IOY$, a proposição I, a definição de Parâmetro e a propriedade transitiva.

Uma outra seqüência de prova pode utilizar os mesmos argumentos utilizados por La Hire, só que com a ordem trocada:

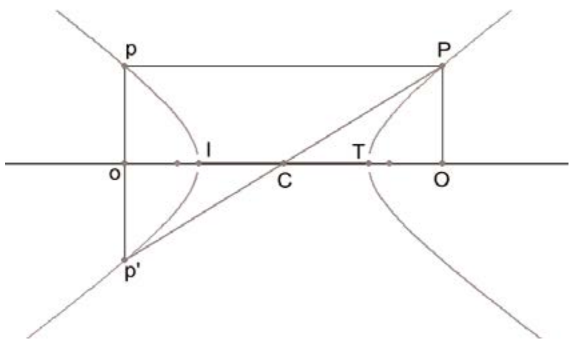
Por semelhança: $IT / TV = IO / OY$. Multiplicando por $IT$ e $TO$: $IT^2 / IT \,.\, TV = IO \,.\, OT / OY \,.\, OT$. *Pela prop. 2:* $CT^2 / ID \,.\, DT = IO \,.\, OT / OY \,.\, OT$. Pela prop. I: $IO \,.\, OT / PO^2 = IO \,.\, OT / OY \,.\, OT$. Assim, $PO^2 = OY \,.\, OT$.

Esta proposição vem a ser aquela que, segundo Vicenzo Bongiovanni em sua tese de doutorado, foi utilizada por Apolônio para justificar a origem do termo "Hipérbole". Em grego significa "excesso" e foi usado por Euclides em "Os Elementos" para expressar a idéia de uma área maior que a de uma figura dada. No nosso caso, o quadrado cujo lado é a ordenada é maior que o retângulo cujos lados são uma parte do eixo (entre o vértice e a ordenada) e o seu parâmetro. O próprio Philippe de La Hire fez um comentário, no prefácio da sua obra, sobre as diferenças entre as três curvas a partir da comparação entre as áreas do quadrado de lado igual a ordenada e de um retângulo onde um dos lados é o parâmetro e o outro é o segmento que vai do vértice $T$ até o pé da ordenada $O$.

Se colocarmos um par de eixos ortogonais no vértice $T$ do Eixo (Determinado ou Maior), então poderemos chamar $TO$ de abscissa (como fez Robinson). Na parábola, o quadrado da ordenada é igual ao produto da abscissa pelo parâmetro (proposição I de parábola); na elipse, é menor (proposição V de elipse) e na hipérbole, é maior. E tanto a falta, quanto o excesso, são dados por um retângulo semelhante à Figura do Eixo $IT$ (retângulo de lados o Eixo e seu Parâmetro) e que um dos lados igual à abscissa $TO$.

## PROPOSIÇÃO IV

***Qualquer diâmetro da hipérbole é dividido ao meio pelo centro** $C$.*




Nessa prova, utilizou a proposição 2. Para uma justificativa mais cuidadosa, poderia ter usado a congruência dos triângulos $COP$ e $Cop'$.

- Essa proposição será usada na proposição 23 de hipérbole.
- Esta proposição equivale à proposição 6 de elipse e à 3 de parábola.

## PROPOSIÇÃO V

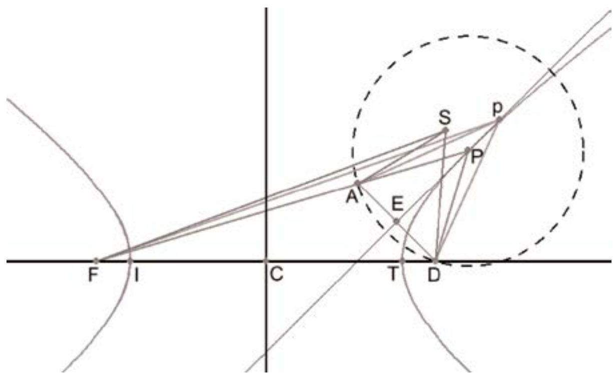
***A reta perpendicular ao eixo determinado IT pelo ponto T é tangente à hipérbole (figura da proposição III).***

Ele provou, por absurdo, que a interseção é única, usando as definições de tangente e hipérbole e a desigualdade triangular. Em seguida, provou que todos os pontos desta reta são exteriores. Esta segunda parte, porém, não é rigorosa, pois assume que o formato da hipérbole é conhecido.

Esta proposição equivale à proposição VII de elipse e à II de parábola.

## PROPOSIÇÃO VI

***A reta mediatriz ao segmento DA é tangente à hipérbole no ponto P (sendo F e D focos e A o prolongamento de FP com PA = PD).***




Ele provou, por absurdo, que a interseção é única, através da definição de hipérbole, da desigualdade triangular e da propriedade que triângulo isósceles possui. Em seguida, provou que todos os pontos desta reta são exteriores.

Essa proposição será usada nas proposições VII e VIII de hipérbole.

Esta proposição equivale à proposição VIII de elipse e à IV de parábola.

## PROPOSIÇÃO VII

***A tangente por um ponto P da hipérbole forma com os segmentos que unem P aos focos (hoje chamados raios vetores) ângulos congruentes (figura da proposição IV).***

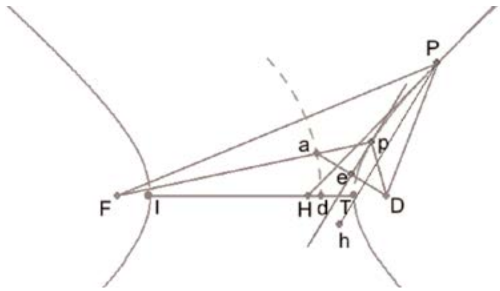
Ele demonstrou essa proposição utilizando a proposição VI e a propriedade de um triângulo isósceles.

Esta propriedade ressalta uma característica da hipérbole muito usada na física e com muitas aplicações práticas. Se uma fonte de luz for colocada em um dos focos da hipérbole, os raios de luz emitidos refletirão na superfície refletora hiperbólica e todos voltarão no sentido oposto, mas na direção do outro foco, qualquer que tenha sido o ponto P de contato. O outro foco será o ponto mais bem iluminado da região, formando uma imagem virtual. É conhecida, então, como propriedade ótica.

Esta proposição equivale à proposição X de elipse e à proposição VIII de parábola.

## PROPOSIÇÃO VIII

***A tangente à hipérbole que passa pelo ponto P é única.***




Ele provou, por absurdo (supondo que Ph fosse a outra tangente por P), que a interseção é única. Para tanto, usou as definições de hipérbole e tangente, a proposição VI e a propriedade de um triângulo isósceles.

Esta proposição equivale à proposição IX de elipse e à V de parábola.

Definiu as "Assíntotas" de uma hipérbole. Para tanto (figura seguinte), utilizou um segmento TA cujo quadrado vem a ser equivalente ao retângulo de lados ID e DT. Na elipse, esse segmento foi o semi-eixo menor. Na hipérbole, ele não atribui nenhum nome especial. Hoje, chamamos de semi-eixo imaginário. No capítulo das novas proposições, foi feita uma nova definição para Eixo Indeterminado como um segmento e não como uma reta.

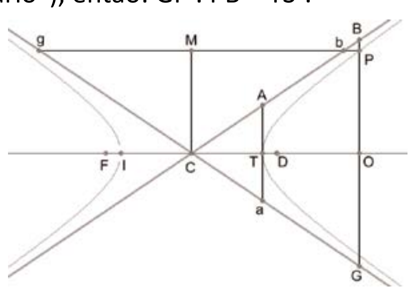
- No corolário, afirma que as retas *CA e Ca* são assíntotas dos dois ramos.

*As proposições seguintes (**IX a XVIII**) tratam de propriedades das assíntotas.*

## PROPOSIÇÕES IX E X

***Seja uma reta paralela a um dos eixos que cruza as duas assíntotas nos pontos B(b) e G(g) e a hipérbole em P. O produto da distância de P até B(b) e G(g) é igual ao quadrado desse semi-eixo.***

Na proposição IX, sendo o semi-eixo o segmento TA (chamado hoje também por "imaginário"), então: GP . PB = $TS^2$.



La Hire provou essa proposição utilizando a definição de assíntota, a semelhança dos triângulos CTA e COB, as propriedades de proporção, a proposição I e a propriedade transitiva.

Essa proposição será usada nas proposições X, XI e XII de hipérbole.

A proposição IX pode também ser escrita $GP \cdot PB = ID \cdot DT$, uma vez que $TA^2$ foi obtido pelo retângulo de lados formados pela distância do foco D até os vértices I e T.

Na proposição X, sendo o semi-eixo o segmento *CT* (que hoje chamamos também por "Real")***: gP · Pb = CT²** (figura da proposição **IX**).*

Provou essa proposição utilizando a definição de assíntota, a semelhança dos triângulos CTA, CMb e COB, as propriedades de proporção, a proposição IX e a propriedade transitiva.

## PROPOSIÇÃO XI

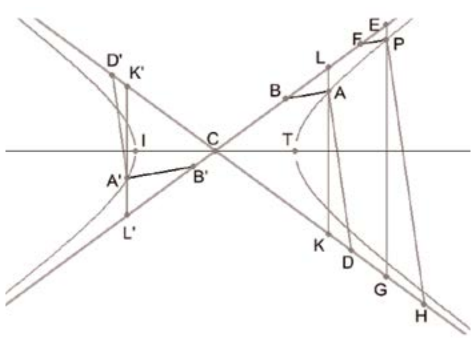
***A hipérbole e suas assíntotas se aproximam continuamente uma da outra quanto mais ambas forem prolongadas e nunca se encontrarão, pois a parte PB da ordenada contida entre a hipérbole e sua assíntota poderá ser feita menor que qualquer linha dada. (figura da proposição IX)***

- Para sua demonstração, utilizou a proposição IX.
- Essa proposição será usada na proposição XIV de hipérbole.
- O conceito atual de limite pode ser usado nessa proposição.

## PROPOSIÇÃO XII

***Sejam dois segmentos PH // AD limitados pela assíntota CD e outros dois segmentos PF // AB, limitados pela outra assíntota CB.***

***Então, PH .PF = AD .AB.***



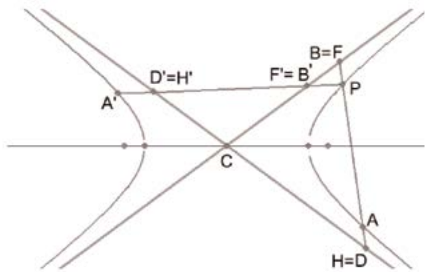

Para sua demonstração, utilizou semelhança entre os triângulos *EPF* e *LAB, PGH* e *AKD*, a proposição IX e multiplicação de quantidades iguais.

Essa proposição será usada nas proposições XIII, XV, XVI e XVII.

Uma leitura atual dessa proposição seria: o produto de segmentos da reta que une o ponto *P* da hipérbole até pontos quaisquer F e H de assíntotas diferentes é igual ao produto de outros dois segmentos paralelos aos primeiros que unem outro ponto qualquer *A* da hipérbole até os pontos B e D das assíntotas, respectivamente.

## PROPOSIÇÃO XIII

***Uma reta cruza as assíntotas em F e D e a hipérbole em A e P. A distância de uma das interseções F desta reta com a hipérbole até a interseção mais próxima com a assíntota é a mesma da outra interseção D até a outra assíntota, ou seja, PF = AD.***

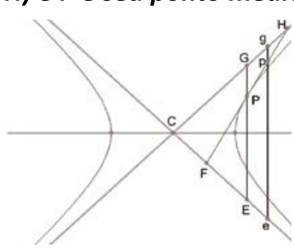



Na prova, utilizou-se a proposição XII (*PH · PF = AD · AB)* sendo que os quatro segmentos estavam contidos numa mesma reta. Em linguagem atual*: PF · (PA + AD) = AD · (PA + PF) implica em PF = AD.*

- Essa proposição será usada nas proposições XIX e XX.

## PROPOSIÇÃO XIV

***Um segmento tangente à hipérbole por P sempre cruza as duas assíntotas (F e H) e P é seu ponto médio.***




Ele provou essa proposição utilizando a semelhança dos triângulos *GPH* e *gpH, FPE* e *Fpe*, as proposições IX e XI e a propriedade transitiva.

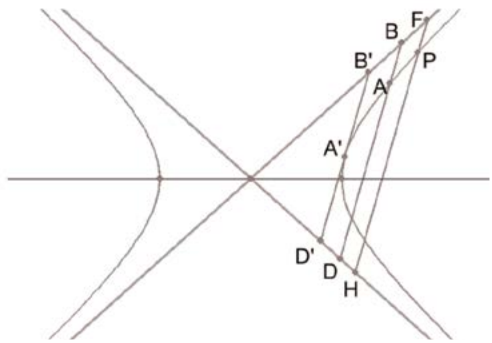
Essa proposição será usada nas proposições XV, XVII, XIX e XX.

A propriedade verificada na proposição anterior para uma secante pode também ser observada, por limite, para a reta tangente.

## PROPOSIÇÕES XV E XVI

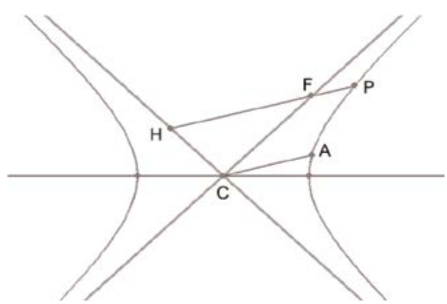
***Seja uma reta que cruza as duas assíntotas em dois pontos F e H e a hipérbole em P. O produto da distância de P até F e H é constante e igual ao quadrado de um segmento paralelo à reta e que passa pelo ponto A' (A) de tangência.***

Na proposição XV, sendo esse segmento tangente à hipérbole e limitado por A' e pela assíntota em B', então: PF . PH = AB . AD = $A'B'^2$.




Ele demonstrou essa proposição utilizando o paralelismo e as proposições XII e XIV.

Na proposição XVI, sendo esse segmento o semidiâmetro limitado por A e pelo centro C, então: PF . PH = $AC^2$.



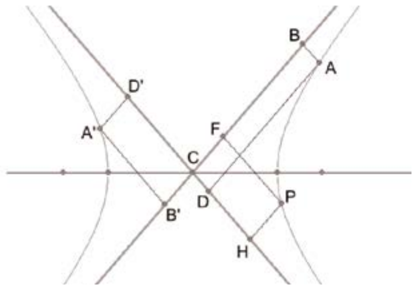

Ele demonstrou essa proposição utilizando o paralelismo e a proposição XII.

Se os pontos A e A' coincidirem, os segmentos CA e A'B' serão semidiâmetros conjugados, conceito que será definido adiante.

Estas proposições generalizam as proposições IV e X de hipérbole quando o diâmetro vira um eixo.

## PROPOSIÇÃO XVII

***Todos paralelogramos cujos lados são paralelos às assíntotas e cujos vértices opostos são o centro C e pontos da hipérbole tem áreas iguais.***

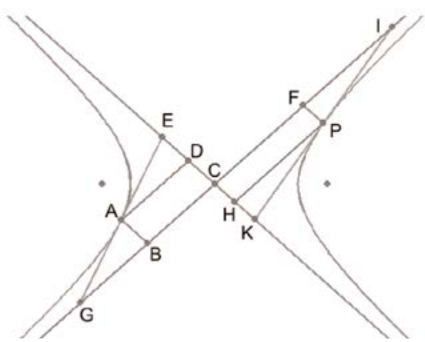



- Sua prova utilizou paralelismo e a proposição XII.
- Essa proposição será usada na proposição XVIII.

Essa proposição possui ligação com um modelo usado para o estudo de grandezas denominadas inversamente proporcionais. Caso as assíntotas sejam perpendiculares (ver corolário da proposição XII), a hipérbole será denominada eqüilátera. Neste caso, o paralelogramo ABCD vira um retângulo. Consequentemente, o produto CD · CB será a sua área que é constante pela presente proposição. Se interpretarmos com a linguagem analítica, o segmento C sendo a abscissa x e o segmento CB sendo a ordenada y, o produto y · x será constante. Duas variáveis cujo produto não se altera formam a idéia desse modelo que tem grande aplicação em muitas fórmulas da física e da química apresentadas no ensino médio.

## PROPOSIÇÃO XVIII

***Os triângulos cujos vértices são o centro C e dois pontos nas assíntotas e o lado oposto a C é tangente à hipérbole tem área constante.***



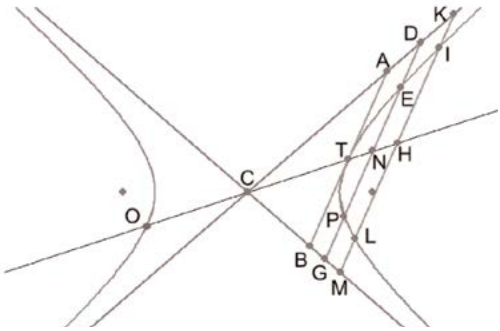

- Sua demonstração usa as proposições XIV e XVII.

Relendo essa proposição, a área de um triângulo formado por uma tangente à hipérbole e as suas assíntotas é constante, qualquer que seja a tangente escolhida.

## PROPOSIÇÃO XIX E XX

***Os segmentos paralelos entre si e limitados por dois pontos da hipérbole são divididos ao meio por um mesmo diâmetro.***

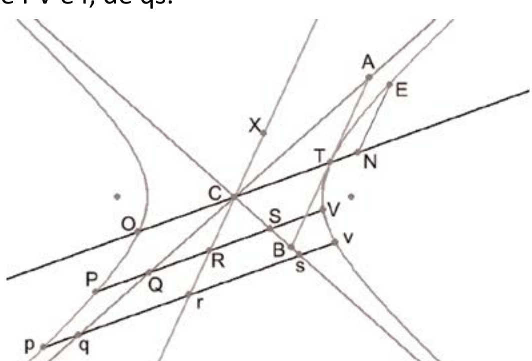
**Na proposição XIX**, sendo os segmentos paralelos a uma tangente por T e o diâmetro sendo o Determinado, pois passa por T, então: H é o ponto médio de LI e N, de PE.




Sua prova utilizou paralelismo e as proposições XIII e XIV. Para uma argumentação mais detalhada, usa-se a semelhança entre os triângulos CDG e CKM.

- Essa proposição será usada na proposição XXI e XXIII.
- Esta proposição equivale à proposição XVI de elipse e à XIII de parábola.

**Na proposição XX**, sendo os segmentos paralelos a um diâmetro por T e o diâmetro sendo o Indeterminado, pois é paralelo à tangente por T, então: R é o ponto médio de PV e r, de qs.



Sua demonstração usou paralelismo e as proposições XIII e XIV. Para uma argumentação mais detalhada, usou a semelhança entre os triângulos CQS e Cqs.

La Hire definiu “Diâmetros Conjugados” da forma idêntica a que fez com a elipse. Em seguida, define “Ordenada de um Diâmetro” como fez na elipse e na parábola.

## PROPOSIÇÃO XXI

***A razão entre o quadrado da ordenada EN de um semidiâmetro CT e o produto dos segmentos que vão do pé N da ordenada até O e T é igual à razão entre o quadrado do semidiâmetro AT e o quadrado do semidiâmetro conjugado $EN^2 : ON \cdot NT :: AT^2 : CT^2$ (veja figura da proposição 19).***

Sua prova usou semelhança entre os triângulos *CTA* e *CND*, propriedades de proporção e a proposição XIX.

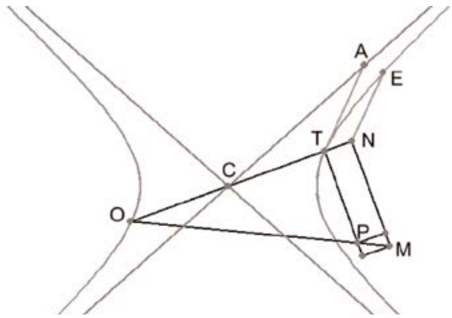
No seu corolário, afirmou que os quadrados das ordenadas e as partes dos dímetros formam uma proporção.

- Essa proposição será usada na proposição XXII e XXIII.
- Esta proposição generaliza a proposição I de hipérbole quando o diâmetro é um Eixo.
- Esta proposição equivale à proposição XVII de elipse.

Definiu “Parâmetro de um Diâmetro” e “Figura de um Diâmetro”. A definição é equivalente à usada na proposição XVIII para o “Parâmetro do Diâmetro” e “Figura de um Diâmetro” de uma elipse.

## PROPOSIÇÃO XXII

***O quadrado de lado EN subtraído pelo retângulo PM (que é semelhante à figura do diâmetro OT) é equivalente ao (retângulo de lados TN e o parâmetro PT do diâmetro OT), ou seja, $EN^2 = TN \cdot NM$.***



Sua demonstração usou a definição de Parâmetro, a semelhança entre os triângulos *OTP e ONM*, multiplicação de quantidades iguais, a propriedade transitiva e a proposição XXI.

No corolário, diz que se o diâmetro *OT* for igual ao seu parâmetro *PT*, então as assíntotas de uma hipérbole serão perpendiculares entre si e todos os diâmetros e os respectivos parâmetros serão iguais. Vale a recíproca: numa hipérbole, cujas assíntotas não são perpendiculares, o diâmetro será diferente do seu parâmetro.

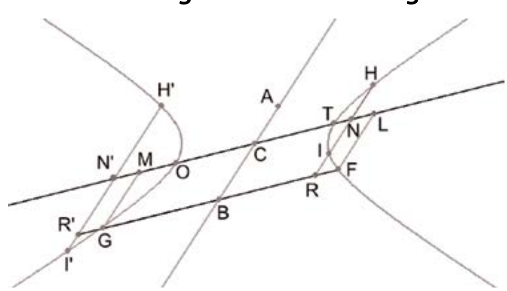
Hoje, chamamos a esse caso especial de “Hipérbole Eqüilátera”. Vale destacar que neste caso, os semi-eixos real **a** e imaginário **b** são iguais. A justificativa é que como o parâmetro **p** é igual ao eixo real (p = 2a) e a definição de parâmetro diz que $p = 2b^2 / a$, então a = b. Vale destacar ainda que a diagonal de um quadrado de lado a (ver nova definição 4 de hipérbole no capítulo 7) coincide com metade da distância focal 2c, ou seja, $c = a\sqrt{2}$.

Esta proposição generaliza a proposição III de hipérbole, pois o diâmetro toma o lugar do Eixo.

Ela equivale ao corolário da proposição XIV de parábola e à proposição XIX de elipse.

## PROPOSIÇÃO XXIII

***Sejam os segmentos FG e HI paralelos aos diâmetros conjugados por T que se encontram em R. O retângulo HR . RI : retângulo FR . RG :: PT : OT.***



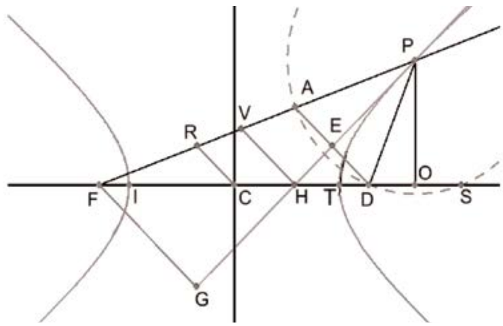

Sua demonstração usou a definição de Parâmetro, paralelismo, multiplicação de quantidades iguais, as propriedades de proporção, a propriedade transitiva e as proposições IV, IXX e XXI.

Ela equivale à proposição XX de elipse, ou seja, ela representa a ampliação do conceito de potência de ponto do círculo para as cônicas.

Existe uma situação para a hipérbole onde *OT* é igual à *PT*: quando a hipérbole é eqüilátera e o ângulo entre as assíntotas é reto (ver proposição XXII de hipérbole). Nesse caso, os retângulos HR · RI e FR · RG serão equivalentes.

## PROPOSIÇÃO XXIV

***O semi-eixo CT é a média geométrica entre os segmentos que vão do centro C até a interseção O do eixo com a ordenada e até a interseção H do eixo com a tangente que passa por P, ou seja, CH : CT :: CT : CO.***




Sua demonstração usou o lema I de elipse, a semelhança entre os triângulos *FGP* e *AEP, FGH* e *DEH*, *FVH* e *FAD*, as propriedades de proporção, a propriedade transitiva e a proposição IV.

No corolário, diz que *IO* estará para *OT* como *IH* para *HT*. A linha *IO* é dita dividida harmonicamente nos pontos *I, O, T, H*. Nesse livro, essa é a única proposição de hipérbole onde aparece a divisão harmônica.

Esta proposição equivale à proposição XI de elipse e à VII de parábola.

# PARTE 4 – DESCRIÇÃO DAS SEÇÕES CÔNICAS

La Hire comentou que a forma como apresentou as cônicas é a mais simples, se forem dados os focos e o eixo.

Nesta parte 4, ele apresentou outras formas de se obter as cônicas a partir de outros dados, que não sejam os focos e o eixo.

Apresentou cinco problemas. No problema 1, pede-se o parâmetro dados um diâmetro e sua ordenada, problema que aplica às 3 cônicas. No problema 2, são pedidas as assíntotas e no 5, a hipérbole. No problema 3, trata da obtenção de uma parábola. No problema 4, trata da obtenção de uma elipse.

## PROBLEMA I

***Sendo dados um diâmetro da seção cônica e sua ordenada, encontrar seu parâmetro. Na elipse, determinar também seu diâmetro conjugado.***

Resolveu para a parábola utilizando a definição de "Parâmetro de Diâmetro" que surge na proposição XIV.

Resolveu para a elipse utilizando as proposições XVII ou XVIII, além da definição de parâmetro de diâmetro. Utilizou a média geométrica entre o diâmetro e o seu parâmetro para encontrar o outro diâmetro.

Resolveu para a hipérbole utilizando as proposições XXI e a definição de "Parâmetro de Diâmetro".

## PROBLEMA II

***Em uma hipérbole, sendo dados um diâmetro determinado, seu parâmetro e o ângulo que este diâmetro faz com sua ordenada, deseja-se descrever as assíntotas.***

Ele resolveu utilizando as definições de "Parâmetro de Diâmetro" e de "Assíntotas" de uma hipérbole.

## PROBLEMA III

***Sendo dados um diâmetro da parábola por T, P como um dos seus pontos e a reta tangente por T. Deseja-se descrever a parábola.***

Ele resolveu utilizando o corolário da proposição XIV e semelhança de triângulos.

A construção proposta não encontra o eixo da parábola.

## PROBLEMA IV

***Descrever uma elipse, sendo dados os diâmetros conjugados AB e ED.***

Ele resolveu utilizando o corolário da proposição XVIII, Pitágoras e semelhança de triângulos. Faz duas outras descrições para a mesma construção proposta e também particulariza para o caso dos diâmetros serem os eixos.

## PROBLEMA V

***Dadas as assíntotas CD e CM, além de um ponto P da hipérbole, descrevê-la.***

Ele resolve utilizando a proposição XIII.

## 6.3 – RESUMO DE TODAS AS PROPOSIÇÕES

### PARÁBOLA

- A proposição **I** apresenta o que pode se transformar na equação analítica atual usual.
- As proposições **II, IV, V, VI, VII, VIII e IX** falam das propriedades da reta tangente.
- A proposição **III** apresenta o diâmetro.
- As proposições **X, XI e XII** mostram equivalência entre áreas formadas por elementos da parábola.
- A proposição **XIII** mostra propriedade entre o diâmetro e uma corda.
- A proposição **XIV** generaliza a proposição **I**.
- A proposição **XV** generaliza a proposição **VII**.
- As proposições **XVI** e **XVII** falam das propriedades do Parâmetro do Diâmetro.

### ELIPSE

- As proposições **I, III e IV** apresentam resultados que equivalem à equação analítica atual.
- A proposição **II** apresenta o Semi-Eixo Menor.
- A proposição **V** apresenta o Parâmetro do Eixo.
- A proposição **VI** fala de uma propriedade do diâmetro.
- As proposições **VII, VIII, IX, X, XI e XII** apresentam propriedades da reta tangente.
- As proposições **XIII, XIV e XV** mostram equivalência entre áreas formadas por elementos da elipse.
- A proposição **XVI** apresenta propriedade entre diâmetro e corda.
- A proposições **XVII** e **XVIII** generalizam as proposições **III** e **IV**.
- A proposição **XIX** generaliza a proposição **V** (Parâmetro do Diâmetro).
- A proposição **XX** apresenta uma propriedade que pode ser chamada de potência de ponto em relação a uma elipse.

### HIPÉRBOLE

- Proposição I: apresenta resultados que equivalem à equação analítica atual.
- Proposição II: apresenta a simetria da hipérbole.
- Proposição III: apresenta o Parâmetro do Eixo.
- Proposição IV: fala de uma propriedade do diâmetro.
- Proposições V, VI, VII, VIII e XXIV: mostram as propriedades da reta tangente.
- Proposições IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII e XVIII: mostram propriedades que envolvem as assíntotas.
- Proposições IXX e XX: apresentam os diâmetros conjugados.
- Proposição XXI: generaliza a proposição I.
- Proposição XXII: generaliza a proposição III.
- Proposição XXIII: apresenta uma propriedade que pode ser chamada de potência de ponto em relação a uma hipérbole.

## 6.4 – O QUE FOI USADO NAS DEMONSTRAÇÕES DAS PROPOSIÇÕES?

| Proposições: | **PARÁBOLA** | **ELIPSE** | **HIPÉRBOLE** |
|---|---|---|---|
| Lema 1 | - | *AI TP* | - |
| I | *// DP TP* | *DE L1 PPR x* | *DH L1 PPR x* |
| II | *// DP TP* | *P1* | *DH // CT* |
| III | *DP DT* | *P1 P2* | *ST P1 DPT PT* |
| IV | *DP DTG TP TI PT* | *// P1 P2 PPR* | *P2* |
| V | *// DP P4 DTG* | *ST P3 DPT PT* | *DH DT DTG* |
| VI | *P4* | *DE ST* | *DH DT DTG TI* |
| VII | *// DP CP4 –* | *DE TP* | *P6 TI* |
| VIII | *TI CP4 OPV PT* | *DE DT DTG TI* | *DTG DH TI P6* |
| IX | *// P4 CT* | *// CT DTG DE* | *DA ST PPR P1 PT* |
| X | *// P7* | *TI P8 OPV PT* | *DA ST PPR P9 PT* |
| XI | *// ST C3P1 PPR PT CP10* | *DE ST TT PPR PT* | *P9* |
| XII | *P10 P11 + –* | *ST P4 P11 PPR PT* | *ST P9 x* |

<table>
<tr><td>XIII</td><td>P6 // DTG P12</td><td>// ST CT P11 PT +</td><td>P12 + –</td></tr>
<tr><td>Lema 2</td><td>-</td><td>ST PPR PT</td><td>-</td></tr>
<tr><td>XIV</td><td>ST P12 : PT</td><td>ST P3 C2P13 L2 PT</td><td>P9 P11 ST PT</td></tr>
<tr><td>XV</td><td>C3P1 // ST PT P7 P13 +</td><td>C1P13 –</td><td>// P12 P14</td></tr>
<tr><td>XVI</td><td>// ST TT PT P1 P7 P9 P13 CP14</td><td>ST P15</td><td>// P12</td></tr>
<tr><td>XVII</td><td>DP PT P16 C2P1</td><td>ST P6 P14 P15 L2 PPR PT</td><td>// P12</td></tr>
<tr><td>XVIII</td><td rowspan="3">Não tem</td><td>P16 P17 PPR</td><td>P14 P17</td></tr>
<tr><td>XIX</td><td>ST P17 P18 PT</td><td>// ST P13 P14</td></tr>
<tr><td>XX</td><td>P17 PPR PT</td><td>ST P13 P14</td></tr>
<tr><td>XXI</td><td colspan="2" rowspan="5">Não tem</td><td>ST P19 PPR</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>XXII</td><td>DPT ST P21 PT x</td></tr>
<tr><td>XXIII</td><td>// DPT P4 P19 P21 PPR PT</td></tr>
<tr><td>XXIV</td><td>L1 ST PPR TT P6 PT</td></tr>
</table>

***LEGENDA***

*//* – Paralelismo
*DP* – Definição de Parábola
*DE* – Definição de Elipse
*DH* – Definição de Hipérbole
*DA* – Definição de Assíntota
*DPT* – Definição de Parâmetro
*DTG* – Definição de Tangente
*TP* – Teorema de Pitágoras
*ST* – Semelhança de triângulos
*TT* – Teorema de Tales
*TI* – Triângulo Isósceles
*DT* – Desigualdade Triangular
*CT* – Congruência de triângulos
*OPV* – Ângulos opostos pelo Vértice
*AI* – Ângulo inscrito
*PT* – Propriedade Transitiva
*P_* – Proposição _
*C_P_* – Corolário _ da Proposição _
*L_* – Lema _
*PPR* – Propriedades de Proporção
\+ – Adição de quantidades iguais
– – Subtração de quant. iguais
*x* – Multiplicação de quant. iguais
: – Divisão de quantidades iguais

## RESUMO DAS PROPRIEDADES USADAS NAS DEMONSTRAÇÕES

**A partir da tabela anterior, podemos identificar as idéias que foram mais utilizadas por La Hire para demonstrar as proposições desse livro. Serão descritas na tabela a seguir:**

| IDÉIAS GEOMÉTRICAS | | FREQUÊNCIA DE UTILIZAÇÃO NAS 61 PROPOSIÇÕES |
|---|---|---|
| Proposições anteriores: | Parábola | 23 |
| | Elipse | 20 |
| | Hipérbole | 27 |
| Semelhança de triângulos e Teorema de Tales | | 27 |
| Propriedade transitiva | | 24 |
| Paralelismo (quinto postulado de Euclides) | | 19 |
| Propriedades de proporção | | 15 |
| Definição de reta tangente | | 8 |
| Definições: | Parábola | 7 |
| | Elipse | 7 |
| | Hipérbole | 5 |
| Triângulo isósceles | | 6 |
| Teorema de Pitágoras | | 4 |
| Desigualdade triangular | | 4 |
| Congruências de triângulos | | 4 |

## 6.5 – CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS SOBRE AS CARACTERÍSTICAS DO PRIMEIRO LIVRO DE PHILIPPE DE LA HIRE DE 1679.

### O USO DA CARACTERIZAÇÃO BIFOCAL.

As proposições foram justificadas essencialmente através da caracterização bifocal. Observando a tabela anterior, podemos verificar que todas as proposições de todas as três cônicas usaram a definições inicial, ou seja, a caracterização feita a partir dos focos das cônicas foi utilizada direta ou indiretamente (através de uma proposição que usou diretamente a definição) na demonstração das **61** proposições do texto. O uso foi direto em **19** proposições e indireto em **42** proposições.

## A INTERAÇÃO ENTRE AS PROPOSIÇÕES.

O texto mostrou-se bastante encadeado. A maior parte das proposições (**35**) foi usada para demonstrar proposições seguintes. Já em **26** delas, não houve aproveitamento para proposições seguintes. Abaixo, serão listadas estas proposições que não foram utilizadas para resultados posteriores:

- Parábola: II, III, V, VIII, XV, e XVII. **(total = 6)**
- Elipse: V, VII, VIII, IX, X, XII, XIX e XX. **(total = 8)**
- Hipérbole: III, V, VII, VIII, X, XV, XVI, XVIII, XX, XXII, XXIII e XXIV. **(total = 12)**

## A LINGUAGEM GREGA.

### O USO DE EQUIVALÊNCIA ENTRE POLÍGONOS

La Hire utilizou no texto das proposições e das demonstrações a equivalência entre polígonos com grande freqüência. A seguir, serão citadas as proposições onde este uso de polígonos com áreas iguais aparece:

- Parábola (I, X, XI, XII e XIV)
- Elipse (I, II, III, IV, V, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX e XX)
- Hipérbole (I, III, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XXI, XXII e XXIII)

Ao todo, somando as **5** de parábola, as **13** de elipse e as **16** de hipérbole, totalizam **34** proposições que utilizam a equivalência de áreas.

### AS PROPRIEDADES MAIS FREQÜENTES NAS DEMONSTRAÇÕES

Na tabela anterior que mostrou as ferramentas mais utilizadas, vemos que tirando as próprias proposições do texto, as idéias geométricas mais comuns usadas como argumento de demonstração foram as seguintes:

- Semelhança de triângulos
- Propriedade transitiva
- Paralelismo
- Propriedades de proporção

Estas 4 idéias, além da Equivalência entre Áreas, fazem parte da linguagem usual grega. Ou seja, o que La Hire afirma no prefácio sobre o uso dos primeiros 6 livros dos "Elementos" de Euclides se confirma. Ele realmente utiliza apenas a linguagem sintética típica da matemática grega.

## A DEFINIÇÃO DE "TANGENTE".

A definição de "Tangente" a uma cônica foi feita por La Hire exigindo que seus pontos fossem exteriores à cônica (exceto o ponto da tangência) na parábola e na hipérbole. Faltam as páginas do original em francês da parte de elipse. Nas provas onde aparece a reta tangente, ele não fez a demonstração da segunda parte (que exige que a reta tenha apenas pontos exteriores). Isso nos leva a desconfiar que ele possa não ter definido a reta tangente à elipse da mesma forma que fez com as outras duas. A tradução para o inglês não contém essa exigência. Assim, ele pode não ter exigido que os pontos fossem exteriores, talvez pelo fato da elipse ser a única curva fechada entre as três apresentadas e, Consequentemente, fica mais clara a noção de interior e exterior. La Hire, talvez, tenha tirado a exigência da reta tangente ser exterior por achar tal característica clara e perceptível.

## AS DEFINIÇÕES CONFLITANTES DE "ORDENADA" E "DIÂMETRO".

La Hire define "Ordenada" para a hipérbole e "Diâmetro" da parábola, da elipse e da hipérbole de uma forma, mas durante o texto os utiliza outra maneira.

No caso da Ordenada, a definiu como a distância de um ponto da cônica até o eixo, mas utilizou também o mesmo termo para o segmento que é o dobro da definição anterior, ou seja, que une dois pontos da cônica através de uma perpendicular ao eixo (proposição 14 de hipérbole, páginas 130 em La Hire [6] e 98 em Robinson [7]).

No caso do diâmetro da parábola, o definiu como uma semi-reta (embora não use esse termo), mas o utilizou como reta (corolário da proposição 5, corolário da proposição 7 e problema 3 da parte 4). Neste caso, podemos desconfiar da origem dessa dupla utilização pelo fato de ele tratar o diâmetro como uma linha. Esta possui um conceito mais abrangente, podendo significar tanto reta como semi-reta.

No caso do diâmetro da elipse e da hipérbole (demonstração da proposição 20 de hipérbole), ele chamou também por "Diâmetro" aquilo que chamaríamos semidiâmetro, ou seja, metade do diâmetro.

## A GENERALIZAÇÃO DO CONCEITO DE "PARÂMETRO DO EIXO".

O conceito de "Parâmetro do Eixo Determinado" usado por La Hire para a hipérbole $4 \cdot ID \cdot DT / IT$ se aplica, na verdade, para as três curvas (no caso da elipse, chamou por "Parâmetro do Grande Eixo"), como foi citado durante este capítulo da descrição na proposição 2 de hipérbole. Sendo que, no caso da parábola, fica simplificado ao quádruplo da distância entre o foco e o vértice (4 · DT). Atualmente esse parâmetro é chamado também por Corda Focal Mínima por ser a menor das cordas que passam pelo foco.

## A DEFINIÇÃO DE "FIGURA DE UM EIXO".

La Hire definiu "Figura de um Eixo" como o produto entre o Eixo (que é um segmento) e o Parâmetro desse Eixo. Ele o fez para a elipse (tanto em relação ao Grande Eixo quanto ao Pequeno Eixo) e para a hipérbole (apenas para o Eixo Determinado, embora fosse possível fazê-lo também para o Eixo Indeterminado conforme sugerimos através da nova definição 4 no capítulo **7** das novas proposições), mas não para a parábola. O motivo é que o Eixo na parábola é uma reta (ou seja, é infinitamente grande).

A "Figura de um Eixo" equivale ao quadrado do outro Eixo. Só existe na elipse e na hipérbole pelo motivo citado acima.

## A DEFINIÇÃO DE "FIGURA DE UM DIÂMETRO".

Da mesma forma, definiu "Figura de um diâmetro" como o produto do diâmetro (que é um segmento) e o Parâmetro desse diâmetro. Na elipse, definiu duas *figuras* para um dado par de diâmetros conjugados. Na hipérbole, apenas para o diâmetro determinado, embora fosse possível fazê-lo também para o "Diâmetro Indeterminado". Na parábola, nenhuma definição foi feita pelo mesmo motivo citado no parágrafo anterior.

A "Figura de um Diâmetro" equivale ao quadrado do outro diâmetro. Só existe na elipse e na hipérbole pela razão acima citada.

## A LOCALIZAÇÃO DA ORIGEM DOS EIXOS COORDENADOS.

Atualmente, a forma usual de se escrever as equações das cônicas coloca a origem do par de eixos ortogonais no centro da cônica (elipse e da hipérbole) e no vértice (parábola). Essa escolha simplifica as equações das cônicas, mas dificulta a interligação entre as cônicas, uma vez que a variável **x** tem significados diferentes para a parábola e para a elipse e a hipérbole. Se todos fossem postos no vértice, as equações da elipse e da hipérbole ficariam maiores, mas a interligação ficaria mais nítida.

## O PAPEL DO EIXO QUE CONTÊM OS FOCOS.

O Grande Eixo (Eixo Maior da elipse) e o Eixo Determinado (Eixo real da hipérbole) desempenham o mesmo papel e são associados a uma determinada quantidade (número). Na parábola, este segmento se transforma em reta e, assim, não pode ser associado a número algum.

## EQUIVALÊNCIA DE ÁREAS.

A ordenada de um diâmetro que é limitado por um ponto P da cônica é metade da corda (paralela à tangente à cônica que passa por P) que a contém. Para provar essas proposições (XIII na parábola, XVI e XVIII na elipse e XIX e XX na hipérbole), La Hire utilizou a última das proposições sobre equivalências entre áreas formadas com elementos das cônicas (XII na parábola e XV na elipse), exceto na hipérbole, uma vez que não fez essas proposições sobre equivalências de áreas. Estas proposições são feitas no capítulo das novas proposições (proposições XXVII, XXVIII e XIX do capítulo 7).

## A PROPOSIÇÃO 6 DA PARÁBOLA.

Esta proposição parece ter chegado "de pára-quedas" na obra de La Hire. Ela só é enunciada para ser usada na demonstração da proposição 13 de parábola. Mas ela poderia ser enunciada de forma análoga para a elipse e para a hipérbole.

## NA ELIPSE, EXISTE RETA TANGENTE EM QUALQUER DIREÇÃO.

Na hipérbole, só existem tangentes cujos ângulos com o eixo real estejam entre 90° e o ângulo formado entre a assíntota e o eixo real. Ou seja, só existem tangentes paralelas aos diâmetros Indeterminados. A partir dessa idéia, podemos entender a assíntota como uma direção que separa os "Diâmetros Determinados" dos "Indeterminados".

## LA HIRE TRABALHOU COM OBJETOS ANÁLOGOS DE FORMAS DIFERENTES.

### CENTRO COMO PONTO MÉDIO DE UM DIÂMETRO.

As proposições VI de elipse e IV de hipérbole são análogas, mas tiveram demonstrações diferentes. A primeira foi por absurdo supondo que o centro não dividisse o diâmetro ao meio, enquanto a segunda foi por congruência de triângulos.

## DEFINIÇÃO DE "PARÂMETRO DE UM EIXO".

La Hire define Parâmetro de um Eixo como um segmento para a parábola (Proposição 1 – o quádruplo da distância entre o foco eo vértice) e como uma razão para a elipse (Proposição 5 – entre o quadrado de um eixo pelo outro eixo) e para a hipérbole (Proposição 3 – entre o retângulo cujos lados são as distâncias do foco aos dois vértices pelo outro eixo).

## 6.6 – PROPOSTAS DE DEFINIÇÕES QUE PODEM SER DEDUZIDAS DESSE TEXTO

### OUTRO “EIXO INDETERMINADO” NA HIPÉRBOLE.

La Hire define o “Eixo Indeterminado” da hipérbole através de uma reta. Mas na elipse ele o definiu (Eixo Menor) através de um segmento. Por analogia, poderia ser feita outra definição para este eixo através de um segmento de reta, como será feita no capítulo das novas proposições. Essa nova definição utiliza também uma “ordenada NO especial” como foi feito na elipse para o Eixo Menor. Só que em vez de passar pelo centro (o que é impossível para a hipérbole), esta ordenada está a uma distância do centro igual à diagonal do quadrado cujo lado é o Semi-Eixo Real (ou Determinado). Da proposição I de hipérbole, se comprova que $NO^2 = ID \cdot DT$.

La Hire não dá nenhum nome especial a este segmento aA (= NOM) que usou para definir a assíntota e que hoje chamamos por “Eixo Imaginário”.

Consequentemente, o “Pequeno Eixo” (Eixo Menor da elipse) e o “Eixo Indeterminado” (Eixo imaginário da hipérbole) também podem desempenhar o mesmo papel ao serem associados a uma determinada quantidade (número). Na parábola, esse segmento se transforma em reta localizada no infinito e, assim, não pode ser associado a nenhum número.

### OUTRO “DIÂMETRO INDETERMINADO CONJUGADO” NA HIPÉRBOLE.

La Hire define o “Diâmetro Indeterminado Conjugado” da hipérbole através de uma reta. Pode ser feita uma outra definição para este diâmetro através de um segmento de reta. Essa nova definição (ver capítulo 7) utiliza também uma “ordenada NO especial desse diâmetro” como foi feito na elipse para o diâmetro conjugado. Só que em vez de passar pelo centro, está a uma distância do centro igual à diagonal do quadrado do semidiâmetro real (ou determinado). A partir da proposição XXI de hipérbole, se comprova que NO = AT.

Os diâmetros conjugados da hipérbole e da elipse desempenham papeis análogos.

No caso da parábola, o segmento que representa o diâmetro se transforma em reta e logo não equivale a nenhum número.

### CONCEITO DE “POTÊNCIA DE PONTO” PARA UMA CÔNICA.

As proposições XX de elipse, XXIII de hipérbole e XVIII de parábola apresentam um resultado que pode ser entendido como uma generalização de conceito de potência de ponto P para uma circunferência.

Sendo A, B, C e D pontos da cônica e P a interseção das retas AB (paralela a um diâmetro) e CD (paralela ao diâmetro conjugado ao primeiro):

$$\frac{PC \cdot PD}{PA \cdot PB} = \frac{diâmetro(// CD)}{seu \text{ parâmetro}} = \frac{diâmetro^2(// CD)}{diâmetro^2(// AB)}$$

A reta AB pode ter qualquer direção.

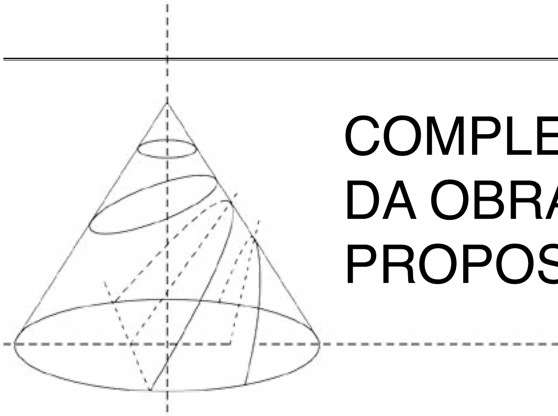
Para a elipse e para a hipérbole, podemos afirmar que o produto entre as distâncias do ponto P até dois pontos A e B de uma cônica e o quadrado do diâmetro conjugado ao diâmetro paralelo ao segmento AB é constante e independe do ponto P escolhido, ou seja, $PA \cdot PB \cdot$ diâmetro$^2$ (// CD) = constante. Este produto seria a "Potência do Ponto P de uma elipse ou de uma hipérbole".

No caso da parábola, PD e o diâmetro tendem ao infinito, e a fórmula se reduz a $PA \cdot PB = PC \cdot p$. A reta AB só pode ser paralela à diretriz. Tal demonstração será feita no capítulo das novas proposições (proposição XIX do capítulo 7).

Vale frisar que no caso da elipse e da hipérbole, uma vez escolhido um ponto P qualquer do plano que contém a cônica, a direção AB que será escolhida não pode ser qualquer, já que não será qualquer reta que passa por P que interceptará a cônica. Na parábola, a limitação é ainda maior, já que a direção AB escolhida só poderá ser perpendicular ao Eixo. Isto decorre do fato dos diâmetros na parábola serem todos paralelos ao eixo, algo que não acontece na elipse e na hipérbole onde existem infinitas direções possíveis para o diâmetro.

Outra observação bem interessante é que essa proposição relativa à potência de um ponto para a cônica é um caso geral das proposições iniciais propostas por La Hire para cada uma das cônicas. Ou seja, as proposições I de parábola, I de elipse e I de hipérbole podem ser deduzidas diretamente dessa definição de Potência aqui apresentada, tomando o ponto P sobre o Eixo da Cônica.

CAPÍTULO 7



# COMPLEMENTAÇÃO DA OBRA: NOVAS PROPOSIÇÕES

No texto feito por La Hire, embora ele apresente as três curvas (parábola, elipse e hipérbole) separadamente, existe forte interligação entre as proposições de cada curva.

Elaboramos então uma tabela mostrando tal analogia. A curva escolhida como referência foi a elipse. Suas proposições foram analisadas em ordem crescente e, a seguir, foram observadas as proposições equivalentes das duas outras curvas. Neste capítulo serão usados os termos atuais usados para cônicas.

## 7.1 – ANALOGIA ENTRE AS PROPOSIÇÕES DAS DIFERENTES CÔNICAS NA OBRA DE PHILIPPE DE LA HIRE

| | PROPOSIÇÕES | | |
|---|---|---|---|
| | **PARÁBOLA** | **ELIPSE** | **HIPÉRBOLE** |
| Uma proporção entre o quadrado da ordenada do eixo (maior ou determinado), o produto das distâncias do pé da ordenada até os vértices, o produto das distâncias do foco aos vértices e o quadrado do semi-eixo (maior ou determinado). | 1 (*) | 1 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Equivalência entre um quadrado cujo lado é o semi-eixo menor (imaginário) e um retângulo cujos lados são as distâncias do foco até os vértices. | Não possui essa propriedade | 2 | **25** |
| Uma proporção entre o quadrado da ordenada de um eixo, o produto das distâncias do pé da ordenada até os vértices, 2º eixo ao quadrado e 1º eixo ao quadrado. | Não possui essa propriedade | 3<br>4 | **26** |
| Definição do parâmetro de um eixo da cônica. | 1 | 5 | 3 |
| O centro é o ponto médio do diâmetro da cônica. | 3 (*) | 6 | 4 |
| A reta que passa pelo vértice e é perpendicular à reta que passa pelos focos é tangente à cônica no vértice. | 2 | 7 | 5 |
| A mediatriz PE do segmento DA é tangente à cônica em P (sendo D o foco, P um ponto da cônica, A um ponto do círculo diretor e E o ponto médio de DA). | 4 | 8 | 6 |
| A reta tangente à cônica por P é única. | 5 | 9 | 8 |
| Congruência entre ângulos formados pela tangente por P e pelos segmentos que vão de P aos focos F e D. | 8 (*) | 10 | 7 |
| Relação entre as distâncias do centro da cônica ao vértice, ao pé da ordenada do ponto P e ao ponto que a tangente por P cruza o eixo de simetria. | 7 (*) | 11<br>12 | 24 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Equivalência entre triângulos formados pela tangente por P, pela tangente pelo vértice, pelo prolongamento do diâmetro e pelo eixo que contém os focos. | 10 | 13 | **27** |
| Equivalência entre um triângulo e um quadrilátero formados pela tangente pelo vértice T, pelo eixo que contém os focos, pelo segmento paralelo à reta tangente por T, pelo segmento paralelo à tangente por P e pelo diâmetro por P. | 11 | 14 | **28** |
| Equivalência entre um triângulo e um quadrilátero formados pela tangente por P, pelo eixo que contém os focos, pelo segmento paralelo à reta tangente pelo vértice T, pelo segmento paralelo à tangente por P e pelo diâmetro por P. | 12 | 15 | **29** |
| Um diâmetro por P divide ao meio qualquer corda paralela à reta tangente por P ou um diâmetro paralelo à tangente por P divide ao meio a corda paralela ao diâmetro por P (diâmetros conjugados). (caso geral da proposição II de hipérbole). | 13 (*) | 16<br><br>18<br>1a. parte | 19<br><br>20 |
| Uma proporção entre quadrado da ordenada de um diâmetro PR, o produto das distâncias do pé da ordenada até as extremidades desse diâmetro, o quadrado do diâmetro conjugado a PR e o quadrado do diâmetro PR (caso geral das proposições III e IV de elipse). | Não possui essa propriedade | 17<br><br>18<br>2a. parte | 21 |

<table>
<tr><td>Definição do "Parâmetro de um Diâmetro" da cônica (caso geral da proposição V de elipse, I de parábola e III de hipérbole).</td><td>14</td><td>19</td><td>22</td></tr>
<tr><td>Uma proporção entre quadrado do diâmetro PR, o quadrado do diâmetro conjugado a PR, o produto das partes de uma corda HI paralela ao diâmetro PR formadas por outra corda FG paralela ao diâmetro conjugado a PR e o produto das partes da corda FG formadas pela corda HI. (Conceito atual de potência de ponto para uma cônica).</td><td>19 (*)</td><td>20</td><td>23</td></tr>
<tr><td>Propriedades com assíntotas.</td><td colspan="2">Não possuem essa propriedade</td><td>9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 e 18</td></tr>
<tr><td>Uma corda perpendicular ao eixo (indeterminado ou menor) é dividida ao meio por ele.</td><td>18</td><td>21</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Generalização da proposição 7 de parábola, trocando eixo por diâmetro.</td><td>15</td><td colspan="2" rowspan="3">Existem, mas ainda não foram feitas.</td></tr>
<tr><td>Ângulo da tangente com o eixo da parábola.</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Propriedades dos parâmetros do eixo e do diâmetro.</td><td>9, 16 e 17</td></tr>
</table>

* Fazendo o limite da elipse ou da hipérbole que leve um dos focos e um dos vértices para o infinito mantendo fixo o outro.

Os números **em negrito** indicam que a propriedade também vale para a curva em questão, mas esteve ausente do texto de La Hire. Como podemos observar da tabela, ele deixou algumas poucas lacunas, fazendo proposições para uma ou duas cônicas, mas deixando de fazer para a(s) restante(s). Este capítulo se propõe a completar parte destas lacunas.

As demonstrações propostas a seguir para algumas dessas lacunas (5 proposições para a hipérbole, 1 para a elipse e 2 para a parábola) seguem uma argumentação idêntica e, a maior parte das vezes, igual à usada por La Hire. Apenas na demonstração de uma proposição (XIX de parábola), a argumentação será diferente da forma que foi normalmente utilizada pelo matemático francês. Será feita também uma nova definição para o Eixo Indeterminado da hipérbole que viabiliza as novas proposições XXV e XVI de hipérbole.

## 7.2 – CINCO OUTRAS PROPOSIÇÕES PARA A HIPÉRBOLE E UMA DEFINIÇÃO MODIFICADA

La Hire faz 15 definições para a hipérbole. Na quarta definição, ele define Eixo Indeterminado como sendo uma reta. Poderia ser feita outra definição para este eixo como sendo um segmento de reta, a fim de aproximar do tratamento dado à elipse.

**Nova definição 4** – Seja CO a diagonal do quadrado de lado CT (o Semi-Eixo Determinado). O segmento NOM, correspondente ao dobro da Ordenada cuja distância até o centro vale CT, é denominado “*Eixo Indeterminado”* da hipérbole (veja figura 1).

Com essa definição, é possível obter (para a hipérbole) as proposições equivalentes às proposições II e III de elipse.

Da mesma maneira, poderíamos definir um novo “Diâmetro Indeterminado” através de um segmento e não através de uma reta como fez La Hire. Bastaria fazer uma “Ordenada de um Diâmetro” cujo pé da Ordenada estivesse a uma distância igual ao semidiâmetro multiplicado por $\sqrt{2}$ (diagonal de um quadrado cujo lado é o Semidiâmetro Determinado). Neste caso, a medida dessa Ordenada seria o *“Semidiâmetro Indeterminado”*.

A proposição XXV proposta a seguir é análoga à proposição II de elipse.

## PROPOSIÇÃO XXV

***As mesmas coisas anteriormente admitidas. Eu afirmo que o retângulo ID, DT é igual ao quadrado de NO que é metade do eixo indeterminado (ou imaginário).***

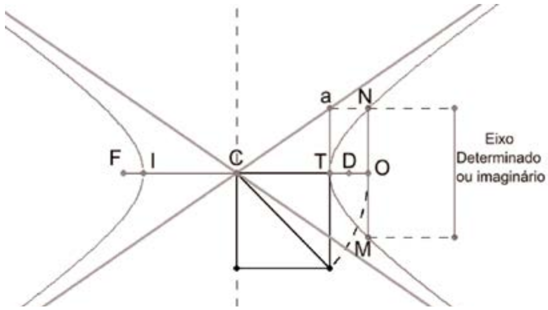



Figura 1

PROVA

Suponha que ***NO*** seja uma ordenada do eixo IT. Pela proposição I de hipérbole, o quadrado de *CT* está para o retângulo *IO, OT* (que é igual ao quadrado de *CT*) como o retângulo *ID, DT* para o quadrado de *NO*. Portanto, o quadrado de *NO* é igual ao retângulo *ID, DT* (ou *IF, FT* que é igual a ele). É o que foi proposto.

A proposição XXVI proposta a seguir é análoga à III de elipse.

## PROPOSIÇÃO XXVI

***O quadrado do Eixo Imaginário aA (equivale ao Pequeno Eixo NM da elipse) da hipérbole está para o quadrado do Eixo Real IT, assim como o quadrado da Ordenada PO do Eixo Real está para produto das partes deste Eixo formadas pela extremidade desta Ordenada (figura 1), ou seja,***

$$aA^2 / IT^2 = PO^2 / IO \cdot OT.$$

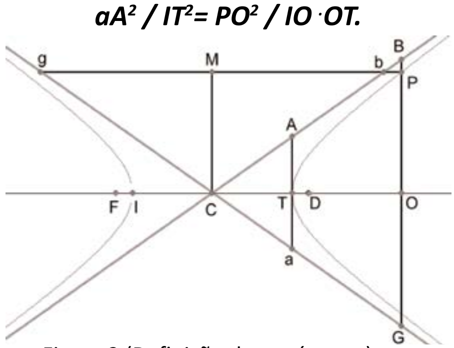



Figura 2 (Definição das assíntotas)

PROVA

Pela proposição 1. $\dfrac{CT^2}{\underbrace{ID \cdot DT}_{\Pr op..25 = TA^2}} = \dfrac{IO \cdot OT}{PO^2}$ Seus dobros: $\dfrac{\overbrace{4 \cdot CT^2}^{IT^2}}{\underbrace{4 \cdot TA^2}_{aA^2}} = \dfrac{IO \cdot OT}{PO^2}$

**C. Q. D.**

As proposições XXVII, XXVIII e XXIX propostas a seguir são análogas à XIII, XIV e XV de elipse e as X, XI e XII de parábola, respectivamente. Elas apresentam equivalências de áreas entre polígonos que possuem pontos nas cônicas.

## PROPOSIÇÃO XXVII

***Se BT é tangente à hipérbole, então os triângulos PAB e TAH são equivalentes.***

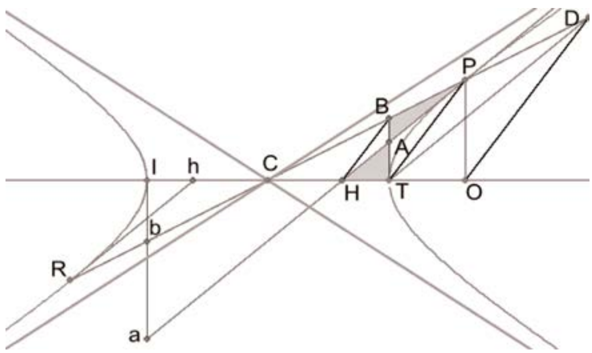



Figura 3

PROVA

Pelo ponto *T*, desenhe *TD* paralela à tangente *PH* e *PO* uma ordenada ao eixo. Do paralelismo, $\dfrac{CD}{CP} = \dfrac{CT}{CH}$ . Pela proposição 24, $\dfrac{CT}{CH} = \dfrac{CO}{CT}$ e $\dfrac{CO}{CT} = \dfrac{CP}{CB}$.

Por transitividade $\dfrac{CD}{CP} = \dfrac{CP}{CB}$, pela mesma razão, $\dfrac{CD}{CP} = \dfrac{CO}{CT}$ e $\dfrac{CP}{CB} = \dfrac{CT}{CH}$. Portanto os segmentos *DO, PT* e *BH* serão paralelos uns aos outros e os triângulos *PTB* e *PTH*, que têm a mesma base *PT* e mesma altura, serão equivalentes. Do qual surgem o triângulo comum *PAT* e os restantes *PAB* e *TAH* terão a mesma área.

**C. Q. D.**

## COROLÁRIO 1

Serão também equivalentes: os triângulos *PDT* e *POT*, os quadriláteros *POTB* e *PDTH* (pela adição dos triângulos equivalentes *PTB* e *PTH*), o quadrilátero *POTB* e o triângulo *OPH* (pela adição do triângulo *POT*), o quadrilátero *PDTH* e o triângulo *DTB* (pela adição do triângulo *PDT)*, o triângulo *CTB* e o triângulo *CPH* (pela adição do *PCO*),

## COROLÁRIO 2

Desenhe a tangente *Ib*. Pode-se concluir que os triângulos *Pab* e *IaH* são equivalentes. Pois *Ib // BT*. Assim os triângulos *CIb* e *CTB* são semelhantes e, como *CI = CT,* são equivalentes também. Portanto os triângulos *CIb, CPH e CTB* serão equivalentes. Finalmente, os triângulos *Pab* e *IaH* serão equivalentes, pela adição do quadrilátero *ICPa*.

O que foi demonstrado para triângulos compreendidos entre os segmentos *CT* e *CP* pode, da mesma forma, ser demonstrado para aqueles compreendidos entre *CI* e *CR*. Vamos, a seguir, provar que a tangente *Rh* deve ser // à tangente *PH*. O triângulo *CPH* é equivalente ao triângulo *CTB*, que é congruente ao triângulo *CIb*. Pode ser demonstrado, de forma análoga à feita nesta proposição, que o triângulo *CIb* é equivalente a *CRh*. Assim, o triângulo *CRh* é equivalente ao triângulo *PCH*. Mas nesses triângulos equivalentes, o ângulo *RCh = PCH e CR = CP* (pela proposição *IV*), então *Ch = CH.* Assim, esses triângulos são semelhantes. *Rh*, portanto, é paralelo a *PH* seu lado homólogo.

## PROPOSIÇÃO XXVIII

***Seja um ponto qualquer E da hipérbole e as retas ELM (// tangente PH) e EFG (// à tangente BT). O triângulo EGM é equivalente ao quadrilátero GTBF.***

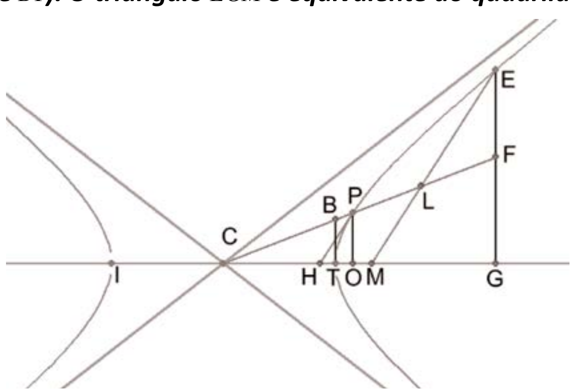



Figura 4

PROVA

Por semelhança de triângulos, $\frac{PO \cdot OH}{EG \cdot GM} = \frac{PO^2}{EG^2}$. Pela proposição 1, $\frac{PO^2}{EG^2} = \frac{IO \cdot OT}{IG \cdot GT}$ .
Como IC = CT, pelo lema II, $\frac{IO \cdot OT}{IG \cdot GT} = \frac{OTBP}{GTBF}$ . Por transitividade, $\frac{PO \cdot OH}{EG \cdot GM} = \frac{OTBP}{GTBF}$.

Pelo corolário **1** da proposição ***XXVII***, o triângulo ***POH*** é equivalente ao quadrilátero ***OTBP***. Portanto, o triângulo ***EGM*** é equivalente ao quadrilátero ***GTBF***. **C. Q. D.**

Se o ponto ***E*** estivesse em qualquer outra posição da hipérbole, por processo análogo, chega-se novamente à mesma conclusão.

## PROPOSIÇÃO XXIX

***O triângulo ELF é equivalente ao quadrilátero LPHM.***

Na figura 4, dos equivalentes *EGM* e *GTBF (*proposição *XXVIII)*, retira-se o quadrilátero comum *FGML*. Sobrará então o triângulo *ELF* equivalente ao quadrilátero *LMTB*, do qual se adiciona o triângulo *CTB* e se retira o triângulo equivalente *CPH*. Assim, o triângulo *ELF* será equivalente ao quadrilátero *LPHM*.

Se o ponto *E* estivesse em qualquer outra posição da hipérbole, por processo análogo, chega-se novamente à mesma conclusão.

# 7.3 – UMA PROPOSIÇÃO PARA A ELIPSE

A proposição proposta a seguir é análoga a II de hipérbole. Trata da simetria da curva em relação ao Eixo Menor. A simetria em relação ao Eixo Maior é dita por La Hire no corolário da construção.

## PROPOSIÇÃO XXI

***O segmento Pp traçado entre os pontos P e p da elipse, paralelo ao eixo maior IT, encontra o eixo menor NM em um ponto Q e PQ = Qp.***


Figura 5

PROVA

Se o ponto *D* for feito o centro de um círculo com raio *FP* e *F* o centro de outro círculo com raio *DP*, então os dois círculos se interceptarão nos pontos *p* e *p'*. Os triângulos *FDP* e *FDp* são congruentes (*LLL*). Logo suas alturas *po* e *PO* serão iguais, assim como *DO* e *Fo*. Logo, *CO = Co* e, pelo paralelismo, *PQ = pQ*.

**C. Q. D.**

## 7.4 – DUAS OUTRAS PROPOSIÇÕES PARA A PARÁBOLA

A proposição proposta a seguir é análoga a XXI de elipse e a II de hipérbole. Aborda a simetria da curva em relação ao Eixo definido por La Hire.

### PROPOSIÇÃO XVIII

**O segmento Pp traçado entre os pontos P e p da parábola perpendicular ao eixo FT, encontra este eixo em um ponto O e PO = Op.**

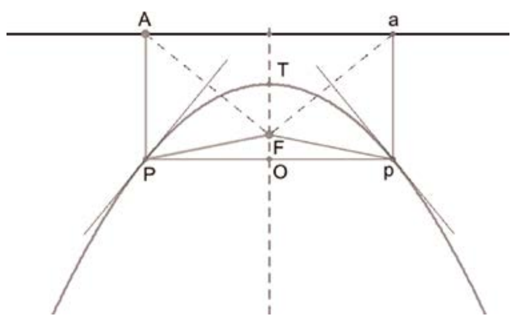



Figura 6

PROVA

Se o foco *F* for feito o centro de um círculo com raio *FP*, então este círculo cruzará o segmento *Pp* nos pontos *P* e *p*. Os triângulos retângulos *FOP* e *FOp* são congruentes (*LLA*). Logo os lados *po* e *PO*.

**C. Q. D.**

A proposição proposta a seguir é análoga a XX de elipse e a XXIII de hipérbole que podem ser interpretadas como uma generalização do conceito de potência de um ponto em relação a um círculo para uma cônica.

# PROPOSIÇÃO XIX

***Seja a reta AB perpendicular ao diâmetro que passa pelo ponto C da parábola, encontrando-o em P, um ponto que não esteja na parábola; então, PA . PB = PC . p***

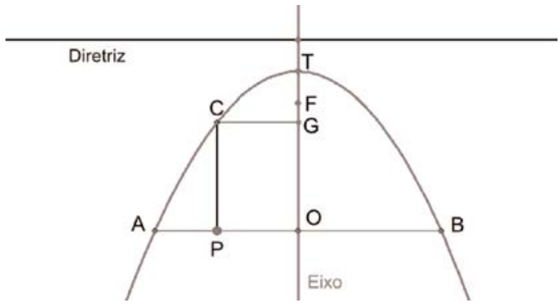



Figura 7

## PRIMEIRA DEMONSTRAÇÃO

Interpretando a parábola como o limite de uma elipse, quando se mantém fixo o vértice T e afasta-se infinitamente o vértice $I$, temos da proposição XX de elipse: $\frac{PC \cdot PD}{PA \cdot PB} = \frac{IT^2}{NM^2}$. Pela definição de parâmetro p, $\frac{IT = (IF + FT)}{p} = \frac{IT^2}{NM^2}$ .
Sendo $E$ o ponto médio de $CD$ e $H$, de $IT$, então $PC\ .\ PD = PC\ .\ (PE + ED) = PC$ . $(2PE + PC) = PC\ .\ (2HT - 2OT + PC) = PC\ .\ (IF + FT - 2OT + PC)$. Por transitividade, $\frac{\mathrm{PC}\ .\ (\mathrm{IF} + \mathrm{FT} - 2\mathrm{OT} + \mathrm{PC}).}{PA \cdot PB} = \frac{IF + FT}{p}$ . Alternando: $\frac{\mathrm{PC}\ .\ (\mathrm{IF} + \mathrm{FT} - 2\mathrm{OT} + \mathrm{PC}).}{IF + FT} = \frac{PA \cdot PB}{p}$ .
Mantendo os pontos $F, T, O$ e $G$ fixos e fazendo $IF$ tender para o infinito, tem-se no limite: $\lim_{FT \to \infty} \frac{\mathrm{PC}\ .\ (\mathrm{IF} + \mathrm{FT} - 2\mathrm{OT} + \mathrm{PC})}{IF + FT} = PC$. Assim, $PA\ .\ PB = PC\ .\ p$.

C. Q. D

## SEGUNDA DEMONSTRAÇÃO

Repartindo os segmentos: $PA \cdot PB = (AO - OP) \cdot (AO + OP) = AO^2 - OP^2$.

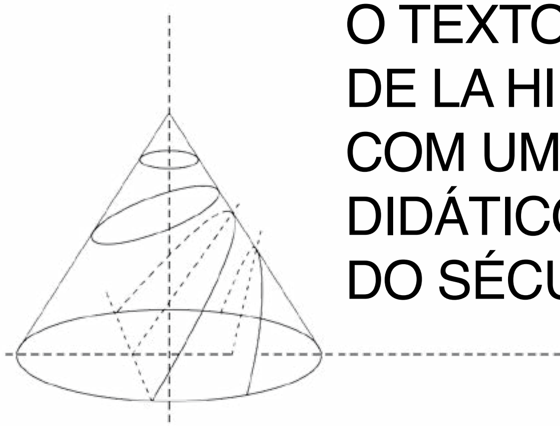
Como $AO$ e $OP$ são ordenadas, pela proposição I de parábola, $AO^2 = TO\ .\ p$ e $OP = (CG)^2 = TG\ .\ p$.

Assim, por substituição, $AO^2 - OP^2 = TO\ .\ p - TG\ .\ p = (TO - TG)\ .\ p = GO\ (=PC)\ .\ p$.

**C. Q. D.**

CAPÍTULO 8

# COMPARAÇÃO ENTRE O TEXTO DE PHILIPPE DE LA HIRE DE 1679 COM UM LIVRO DIDÁTICO RELEVANTE DO SÉCULO XX (F. I. C.)



Um dos objetivos dessa pesquisa foi investigar a possível influência desse texto do primeiro livro de 1679 de Philippe de La Hire no ensino atual. Procuramos, então, uma obra relevante para o ensino de cônicas do século XX. Dentre outras, escolhemos a que desconfiávamos ser da maior relevância no Brasil: "Elementos de Geometria" do F. I. C. Este livro foi escrito pelo membro Gabriel Marie (conhecido como F. G. M.) de uma irmandade cristã cujas iniciais do seu líder eram F. I. C. (Frère Ignace Chaput). Este livro parece ter tido grande utilização no ensino de geometria em vários países do mundo ocidental. No Brasil, teve uma tradução e adaptação da 14ª edição feita por Raja Gabaglia em 1954 **[10]**. Constatamos também que as outras edições em português não apresentaram alterações expressivas.

## 8.1 – O PROGRAMA DE ACESSO À ESCOLA POLYTECHNICA

A fim de confirmar essa possível relevância, consultamos o Programa de Acesso da Escola de Engenharia da UFRJ (antiga Escola Polytechnica) de 1907

[11] existente na Biblioteca de Obras Raras do CT-UFRJ. Consultamos também o programa de acesso de outros anos das décadas de 20, 30 e 40 e praticamente não observamos modificações com este de 1907.

A parte que fala das curvas notáveis (página 16 de [11]) será descrita, a seguir, com grafia da época:

PROGRAMA DE ACESSO (1907)

**142.** *Ellipse, como logar geométrico. Traçado da ellipse por movimento contínuo e por pontos. Dos eixos, do centro, dos vértices e da excentricidade da elipse.*

**143.** *Traçar uma tangente a ellipse: 1º, por um ponto sobre a curva; 2º, por um ponto fôra da curva; 3º, parallelamente a uma recta dada. Normal a ellipse.*

**144.** *Theorema: a projeção de um circulo sobre o plano é uma ellipse.*

**145.** *Área de uma ellipse.*

**146.** *Hyperbole, como logar geométrico. Traçados da hyperbole por movimento contínuo e por pontos. Dos eixos, do centro, dos vértices e da excentricidade da hyperbole. Hyperbole eqüilátera.*

**147.** *Traçar uma tangente a hyperbole: 1º, por um ponto sobre a curva; 2º, por um ponto fôra da curva; 3º, parallelamente a uma recta dada. Normal a hyperbole.*

**148.** *Asymptotas da hyperbole; traçado da hyperbole pelas propriedades segmentares.*

**149.** *Parabola, como logar geométrico. Traçado da parábola por movimento contínuo e por pontos. Do eixo, do vértice e da parabola. A parabola como limite para que tende uma ellipse.*

**150.** *Traçar uma tangente a parabola: 1º, por um ponto sobre a curva; 2º, por um ponto fôra da curva; 3º, parallelamente a uma recta dada.*

**151.** *Da Área do segmento parabolico.*

**152.** *Formula de Simpson para avaliar aproximadamente áreas planas; sua extensão à determinação de volumes.*

**153.** *Secções cônicas. Theorema de Dandelin.*

Os tópicos **154** a **159** incluem outras curvas: cissóide, espiral, ciclóide, epiciclóide e espiral.

| Tópico do Programa de Acesso | Proposição do F. I. C. |
|---|---|
| 142 | 613, 614, 615, 619 e 620 |
| 143 | 627, 628,629 e 631 |
| 144 | 634 |
| 145 | 637 |
| 146 | 642, 643, 644, 649, 650 e 651 |
| 147 | 664, 665, 666, 667, 668, 669 e 670 |
| 148 | 657, 658, 659, 660 e 661 |
| 149 | 672, 673, 674, 675, 676 e 681 |
| 150 | 693, 694 e 695 |
| 151 | 696, 697 e 698 |
| 152 | Item V da terceira parte do apêndice |
| 153 | 816, 817, 818 e 819 |

Analisando esse programa, vemos uma enorme coincidência entre os tópicos apresentados e as proposições existentes no F. I. C. [10]. Faremos, a seguir, uma associação entre esses tópicos e as proposições do F. I. C.:

Os tópicos que falam de outras curvas usuais (**154** a **159**) estão, também, plenamente e identicamente contemplados no texto do F. I. C..

Existe uma coincidência na ordem e na forma de apresentação das proposições. Parece uma cópia do que é apresentado no texto do F. I. C..

A caracterização usada para as cônicas é a mesma, assim como a utilização tanto da construção por pontos como a construção contínua. Um bom exemplo dessa semelhança é o problema de traçar uma tangente à cônica que o F. I. C. resolve primeiro para um ponto na curva, depois para um ponto fora e finalmente sendo paralela a uma direção dada. O Programa de Acesso apresenta exatamente os mesmos problemas e os coloca na mesma ordem. O F. I. C. apresenta fórmulas para as áreas da elipse e do segmento parabólico, mas não o faz para o segmento hiperbólico, da mesma forma que o Programa de Acesso. Não tem um único item desse programa que não seja plenamente coberto dentro do texto do F. I. C..

Assim, nossa desconfiança da relevância do F. I. C. para o ensino foi reforçada por essa observação do Programa de Acesso à Escola Polythechnica.

Partimos, assim, para uma comparação entre o texto de La Hire de 1679 com essa tradução do F. I. C. de 1954. O resumo desta comparação será mostrada a seguir e será feita em dois sentidos: primeiramente, do texto do F. I. C. para o texto de La Hire; depois, do texto de La Hire para o do F. I. C.. A comparação mais detalhada está no texto da dissertação que deu origem a esse livro. O apêndice B faz um resumo das proposições sobre cônicas presentes no F.I.C..

## 8.2 – RESUMO DAS COMPARAÇÕES

### PROPOSIÇÕES DE ELIPSE

| F. I. C. | La Hire |
|---|---|
| 613 | D1, D5 e Gênese |
| 614 | Não tem |
| 615 | E1– ± E2– Gênese E3– CP2 E4– Gênese |
| 616 | (P6 e P9)* |
| 617 | 1ª – ± 2ª – ± |
| 618 | (D1 e Gênese)* |
| 619 | 1ª – Gênese* 2ª – ± 3ª – (P6 e P2)* |
| 620 | E1– Não tem E2 – Gênese * E3 – P2* |
| 621 | P10* |
| 622 | C1 – ± C2 – P10* |
| 623 | E1 – P8 * E2 – P8* E3 – P7* |
| 624 | P8* |
| 625 | Não tem |
| 626 | P8* |
| 627 | P10* |
| 628 | P10* |
| 629 | Não tem |
| 630 | P9* |
| 631 | Não tem |
| 632 | E1 – Corolário 2 da P13 E2 – Não tem |
| 633 | Não tem |
| 634 | Não tem |
| 635 | Não tem |
| 636 | Não tem |
| 637 | Não tem |

| | |
|---|---|
| 638 | Não tem |
| 639 | Não tem |
| 640 | Não tem |
| 641 | Não tem |

- O símbolo estrela "*" significa que a associação não é plena, ou seja, não são equivalentes. A identidade é parcial e / ou os caminhos para a demonstração são diferentes e / ou as proposições são recíprocas.
- O símbolo "±" significa que, embora a proposição não tenha sido enunciada por La Hire, ele dá pistas durante a obra indicando que parecia conhecê-la.
- A letra **E** significa Escólio. A letra **P** significa Proposição.
- A letra **C** significa Corolário. A letra **D** significa Definição.

## CONCLUSÃO

Em **15** das **29** proposições do **F. I. C.** para a elipse, o resultado foi explicitado por Philippe de La Hire ou parecia ser conhecido por ele. Já em **14** delas, não há qualquer menção feita no texto de La Hire.

## PROPOSIÇÕES DE HIPÉRBOLE

| **F. I. C.** | **La Hire** |
|---|---|
| 642 | D1, D5 e Gênese |
| 643 | Não tem |
| 644 | Gênese |
| 645 | E1– ± E2– Gênese E3– Gênese E4– Gênese |
| 646 | ± |
| 647 | ± |
| 648 | ± |
| 649 | 1ª – Gênese 2ª – P2 3ª – P4* |
| 650 | E1 – D3 e D4 E2 – D11 |
| 651 | 1ª – P22 2ª – Gênese |
| 652 | P7 |
| 653 | C1 – P6* e D8* C2 – ± |
| 654 | E1– P6* E2– P6* E3– P5* |
| 655 | ± |

| | |
|---|---|
| 656 | Não tem |
| 657 | (D11 e P11)* |
| 658 | (D11 e P11)* |
| 659 | (D11 e P11)* |
| 660 | (D11 e P11)* |
| 661 | C1 – Não tem C2 – P22 |
| 662 | Não tem |
| 663 | Não tem |
| 664 | P7* |
| 665 | Não tem |
| 666 | E1– D8* E2– P8* E3– Não tem |
| 667 | Não tem |
| 668 | Não tem |
| 669 | $\pm$ |
| 670 | 1ª– $\pm$ 2ª – $\pm$ |
| 671 | Não tem |

- O símbolo estrela "*" significa que a associação não é plena, ou seja, não são equivalentes. A identidade é parcial e / ou os caminhos para a demonstração são diferentes e / ou as proposições são recíprocas.
- O símbolo "$\pm$" significa que, embora a proposição não tenha sido enunciada por La Hire, ele dá pistas durante a obra mostrando que parecia conhecê-la.
- A letra **E** significa Escólio. A letra **C** significa Corolário.
- A letra **P** significa Proposição. A letra **D** significa Definição.

## CONCLUSÃO

Em **16** das **30** proposições do **F. I. C.** sobre hipérbole, o resultado foi explicitado por Philippe de La Hire ou parecia ser conhecido por ele. Já em **14** delas, não há qualquer comentário no texto de La Hire.

## PROPOSIÇÕES DE PARÁBOLA

| **F. I. C.** | **La Hire** |
|---|---|
| 672 | D1, D2 e D7* |
| 673 | Não tem |

| | |
|---|---|
| 674 | ± |
| 675 | ± |
| 676 | Gênese |
| 677 | 2ª parte da demonstração de P2* |
| 678 | (2ª parte da demonstração de P2 e D1)* |
| 679 | D3* |
| 680 | E1 – Gênese E2 – No prefácio e D5* |
| 681 | ± |
| 682 | P9 (de elipse)* e P13* |
| 683 | P8 |
| 684 | C1 – 1ª de P4* C2 – (2ª de P4 e D6)* |
| 685 | E1 – P4* E2 – P8* E3 – P9* E4 – P2* |
| 686 | (Gênese e P4)* |
| 687 | 1ª – P2* e D1 2ª – (P4 e Gênese)* |
| 688 | Não tem |
| 689 | (P7 e P9)* |
| 690 | E1 – P7 E2 – P9 |
| 691 | P1* |
| 692 | Corolário de P1* |
| 693 | Gênese* |
| 694 | Não tem |
| 695 | Não tem |
| 696 | Não tem |
| 697 | Não tem |
| 698 | Não tem |

- O símbolo estrela “*” significa que a associação não é plena, ou seja, não são equivalentes. A identidade é parcial e / ou os caminhos para a demonstração são diferentes e / ou as proposições são recíprocas.
- O símbolo “ ± ” significa que, embora a proposição não tenha sido enunciada por La Hire, ele dá pistas durante a obra indicando que parecia conhecê-la.
- A letra E significa Escólio. A letra C significa Corolário.
- A letra P significa Proposição. A letra D significa Definição.

CONCLUSÃO

Em **17** das **27** proposições do **F. I. C.** sobre parábola, o resultado foi explicitado por Philippe de La Hire ou parecia ser conhecido por ele. Não há no texto do La Hire qualquer menção a **10** destas proposições.

## 8.3 RESUMO DAS COMPARAÇÕES (SENTIDO INVERSO)

### PROPOSIÇÕES DE PARÁBOLA

| La Hire | F. I. C. |
|---|---|
| Gênese | 676, 680*, 686*, 687*, 693* |
| D1 | 672, 687 (E1) |
| D2 | 672 |
| D3 | 608 e 679* |
| D4 | 611 |
| D5 | Não tem |
| D6 | 609* |
| P1 | 691* e 692* |
| D7 | 672* |
| P2 | 685* (E4) |
| P3 | Não tem |
| P4 | (684, 685, 686, 687, 693)* |
| P5 | Não tem |
| P6 | Não tem |
| P7 | 690 (E1)* |
| P8 | 683, 685 (E2)* |
| P9 | 690 (E2)* |
| P10 | Não tem |
| P11 | Não tem |
| P12 | Não tem |
| P13 | 682* |
| D8 | Não tem |
| P14 | Não tem |
| D9 | Não tem |

| | |
|---|---|
| P15 | Não tem |
| P16 | Não tem |
| P17 | Não tem |

- O símbolo estrela "*" significa que a associação não é plena, ou seja, não são equivalentes. A identidade é parcial e / ou os caminhos para a demonstração são diferentes e / ou as proposições são recíprocas.
- A letra **E** significa Escólio. A letra **P** significa Proposição. A letra **D** significa Definição

## CONCLUSÃO

A partir dessa tabela, entre os **27** teoremas, definições e a gênese da parábola presentes no texto de **La Hire**, os conteúdos foram explicitados pelo **F. I. C.** em **14** delas. Não há no texto do **F. I. C.** qualquer menção a **13** destas proposições.

## PROPOSIÇÕES DE ELIPSE

| La Hire | F. I. C. |
|---|---|
| Gênese | 613, 615*, 618*, 619*, 620* |
| D1 | 613, 618* |
| D2 | 608 |
| D3 | 619 |
| D4 | 619 |
| D5 | 613 |
| D6 | 611 |
| D7 | Não tem |
| D8 | 609 |
| L1 | 261 |
| P1 | Não tem |
| P2 | 615 (3ª)*, 619, 620* |
| P3 | Não tem |
| P4 | Não tem |
| D9 | Não tem |
| D10 | Não tem |
| P5 | Não tem |

| | |
|---|---|
| P6 | (616, 619 (3ª))* |
| P7 | 623 (E3)* |
| P8 | 623 (E1 e E2)*, 624*, 626* |
| P9 | 630* |
| P10 | 621*, 622*, 627*, 628* |
| P11 | Não tem |
| P12 | Não tem |
| P13 | 632 (E1) |
| L2 | Não tem |
| P14 | Não tem |
| P15 | Não tem |
| P16 | Não tem |
| P17 | Não tem |
| P18 | Não tem |
| D11 | Não tem |
| D12 | Não tem |
| D13 | Não tem |
| D14 | Não tem |
| P19 | Não tem |
| P20 | Não tem |

- O símbolo estrela "*" significa que a associação não é plena, ou seja, não são equivalentes. A equivalência não existe por ser parcial e / ou por envolver outras idéias, entre elas a recíproca.
- A letra E significa Escólio. A letra P, Proposição. A letra D, Definição.

## CONCLUSÃO

A partir da tabela anterior, entre os **37** teoremas, definições e a Gênese da elipse presentes no texto de **La Hire**, seus conteúdos foram explicitados pelo **F. I. C.** em **16** delas. Não há no texto do **F. I. C.** qualquer menção a **21** destas proposições.

# PROPOSIÇÕES DE HIPÉRBOLE

| La Hire | F. I. C. |
|---|---|
| Gênese | 642, 645*, 648*, 649*, 651(2ª)* |
| D1 | 642 |
| D2 | 608 |
| D3 | 649* e 650 |
| D4 | 649* e 650 |
| D5 | 642 |
| D6 | 611 |
| D7 | Não tem |
| D8 | 609*, 653*, 666* (E1) |
| P1 | Não tem |
| P2 | 649 (2a)* |
| D9 | Não tem |
| D10 | Não tem |
| P3 | Não tem |
| P4 | 649 |
| P5 | 654 |
| P6 | 653*, 654* |
| P7 | 652*, 664* |
| P8 | 666 (E2)* |
| *D11* | *650*, 657*, 658, 659*, 660** |
| *P9* | *Não tem* |
| *P10* | *Não tem* |
| *P11* | *650*, 657*, 658, 659*, 660** |
| *P12* | *Não tem* |
| *P13* | *Não tem* |
| *P14* | *Não tem* |
| *P15* | *Não tem* |
| *P16* | *Não tem* |
| *P17* | *Não tem* |
| *P18* | *Não tem* |
| *P19* | *Não tem* |
| *P20* | *Não tem* |

| | |
|---|---|
| *D12* | *Não tem* |
| *D13* | *Não tem* |
| *P21* | *Não tem* |
| *D14* | *Não tem* |
| *D15* | *Não tem* |
| *P22* | *651(1a)*, 661(C2)** |
| *P23* | *Não tem* |
| *P24* | *Não tem* |

- O símbolo estrela "*" significa que a associação não é plena, ou seja, não são equivalentes. A equivalência não existe por ser parcial e / ou por envolver outras idéias, entre elas a recíproca.
- A letra E significa Escólio.
- A letra C significa Corolário.
- A letra P significa Proposição.
- A letra D significa Definição.

### CONCLUSÃO

A partir da tabela anterior, entre os 40 teoremas, definições e a gênese da hipérbole presentes no texto de La Hire, os conteúdos foram explicitados pelo F. I. C. em 17 delas. Não há no texto do F. I. C. qualquer menção a 23 destas proposições.

## PARTE 4 – DESCRIÇÃO DAS SEÇÕES CÔNICAS

Estes 5 problemas não foram apresentadas pelo F. I. C..

## 8.4 – O QUE CONCLUIR DA COMPARAÇÃO ENTRE OS DOIS LIVROS?

Comparando a tabela que resume as propriedades usadas por La Hire nas demonstrações da sua obra no capítulo 5 (da Descrição) e a tabela do Apêndice 1 que faz o mesmo resumo para o F. I. C., podemos constatar diversas semelhanças e também diversas diferenças entre as duas obras.

### SEMELHANÇAS

A mesma caracterização baseada nos focos para as três cônicas. Ou seja, ambos fazem a definição a partir do plano e utilizam tal caracterização bifocal (elipse e hipérbole) e “Foco mais Diretriz” (parábola) para a demonstração das proposições do texto.

O uso de ferramentas sintéticas preferencialmente. O uso da geometria analítica é nulo no texto de La Hire (embora a primeira proposição de cada cônica permita a obtenção das suas equações de forma imediata, conforme mostramos no capítulo **6** da descrição). O texto do F. I. C. só utiliza a linguagem analítica em apenas uma proposição de parábola (691), onde deduz a equação da curva.

Ambos utilizam com grande freqüência as definições das cônicas, a semelhança de triângulos (incluindo congruência) e o paralelismo (quinto postulado de Euclides) nas demonstrações das proposições nas demonstrações das proposições. Veja o resumo a seguir:

| | DEFINIÇÕES DAS CÔNICAS | SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS | PARALELISMO |
|---|---|---|---|
| **La Hire** | 19 | 30 | 19 |
| **F. I. C.** | 25 | 12 | 18 |

Os textos possuem muitas proposições que incluem, de alguma forma, o traçado de uma reta tangente por um ponto da cônica e suas propriedades: La Hire o faz em **31** das **99** proposições (incluindo definições e lemas) e o F. I. C. em **37** das **86** proposições (incluindo definições e lemas).

Os dois textos apresentam grande recorrência, ou seja, com freqüência utilizam proposições anteriores para demonstrar uma proposição seguinte: La Hire (**35** das **61** proposições) e o F. I. C. (**56** das **71** proposições).

Os dois textos são didáticos, ou seja, possuem leitura acessível. Não foi por acaso, então, a nossa “constatação” do grande uso do F. I. C. para o ensino de cônicas em vários países por mais de um século, algo que não temos registro em relação outro texto.

La Hire não apresenta proposições no espaço. O F. I. C. faz apenas uma proposição no espaço (634) que diz ser uma elipse a projeção de um círculo sobre um plano que contém o diâmetro desse círculo. Mas a demonstração utiliza a caracterização da elipse no plano.

## DIFERENÇAS

La Hire utiliza as propriedades de proporção em **15** das proposições e propriedade transitiva em **24** das proposições. F. I. C. quase não utiliza essas ferramentas.

A forma como os textos utilizam áreas diferem entre si. La Hire faz uso das idéias de equivalência de áreas, sem necessariamente calculá-las. Já o F. I. C. busca a medida de cada superfície que utiliza, ou seja, faz uso das fórmulas para o seu cálculo.

La Hire não utiliza o conceito de limite nas suas demonstrações. Já o F. I. C. faz uso dessa idéia em **9** proposições.

La Hire não apresenta no texto qualquer caracterização unificadora das três cônicas, enquanto o F. I. C. apresenta uma definição que serve para as três cônicas (proposições 625 de elipse, 656 de hipérbole e 687 de parábola)

Como o texto do F. I. C. envolve outras partes da geometria, ele apresenta definições que servem para outras curvas (608 a 612). O texto do La Hire só aborda as cônicas, o que não permitiu fazer a mesma escolha.

O F. I. C. só define parâmetro para a parábola, enquanto La Hire faz a definição para todas as 3 cônicas.

## CONCLUSÃO DESTA COMPARAÇÃO

Depois de realizada a comparação entre os livros nos dois sentidos (primeiro do F. I. C. para La Hire e depois no sentido contrário), constatamos coincidência em **95** proposições e discrepância em **97** delas. Assim, há uma semelhança que gira em torno dos 50%. Mas em algumas delas, apesar do conteúdo ter sido explicitado por apenas um dos autores, temos a desconfiança do conhecimento do resultado pelo outro autor, conforme foi comentado em cada proposição ao longo desse capítulo. Das **38** definições apresentadas por La Hire, **21** estão presentes no F. I. C..

A comparação entre os dois livros permite constatar certo grau de comunicação entre eles. As semelhanças são expressivas: a mesma caracterização das cônicas, a mesma linguagem sintética, uma coincidência de aproximadamente metade das proposições, um expressivo grau de recorrência às proposições anteriores na demonstração de uma proposição seguinte, o uso acentuado das definições das cônicas no plano, das semelhanças de triângulo e de paralelismo nas demonstrações das proposições.

Não sabemos exatamente qual foi a influência de La Hire sobre Gabriel Marie ao escrever o F. I. C. O único vínculo claro que detectamos foi através da sua proposição 626, onde ele se refere ao resultado como "*Teorema de La Hire*". Este Teorema, porém, não aparece na obra de La Hire. Cabe certamente uma averiguação mais cuidadosa sobre o que realmente aconteceu desde 1679 até o século XIX. Essa comparação feita neste capítulo da nossa dissertação fornece uma boa motivação para a realização de uma investigação mais ampla sobre como se deu e até que ponto houve essa influência de La Hire sobre os textos com fins didáticos produzidos nos dias atuais.

CAPÍTULO 9

# POR QUE CONHECER LA HIRE?

Este livro teve como foco a tradução, a descrição e a comparação da Obra "Novos Elementos das Seções Cônicas" feita por **Philippe de La Hire** em **1679**. Faremos a seguir uma síntese de tudo o que foi discutido nos capítulos anteriores.

## RESUMO DA DESCRIÇÃO DA OBRA

- A presente obra introduz as cônicas a partir da caracterização bifocal, utilizando, como ferramenta, a geometria clássica dos gregos. É feita totalmente no plano.
- As três curvas são expostas separadamente, mas de uma forma tal que fica clara a ligação entre as elas.
- A primeira proposição de cada cônica permite a rápida migração para a geometria analítica, embora ele não o faça nesse livro, mas sim nos outros dois livros da mesma obra de 1679.
- Apresenta parâmetros aparentemente diferentes para cada cônica, não se preocupando em interligá-los.
- As proposições que deram origem aos termos elipse (falta), parábola (igualdade) e hipérbole (excesso) são exibidas.
- Deduz um grande conjunto de propriedades a respeito da reta tangente.
- Mostra as propriedades envolvendo áreas de triângulos e quadriláteros para as três cônicas.

- Uma proposição que pode ser entendida como o conceito de "Potência de Ponto em Relação a Uma Cônica" é feita para a elipse e para a hipérbole.
- Diversas propriedades de assíntotas da hipérbole são demonstradas.
- O conceito de "Diâmetros Conjugados" é mostrado para a elipse e para a hipérbole.

## O AUTOR

A imensa produção acadêmica de Philippe de La Hire (ver apêndice D) reforça a necessidade de uma maior difusão da sua obra. Ele reservou maior atenção para as seções cônicas e para a astronomia. Além de ser um matemático, por excelência, La Hire vivenciou de forma ampla o seu lado engenheiro. Um bom exemplo dessas duas habilidades é o estudo da epiciclóide onde ele primeiro produziu um tratado sobre as propriedades dessa curva e em seguida sugeriu a aplicação da epiciclóide para o formato dos dentes de uma engrenagem. Finalmente, construiu uma bomba hidráulica que utilizava engrenagens com a forma da citada curva.

Ele transitou com habilidade pelas duas linguagens geométricas existentes na sua época, escrevendo obras tanto com abordagem analítica quanto com abordagem sintética. Ele viveu justamente no período seguinte ao surgimento dessa nova geometria proposta por Descartes.

Mas foi o seu envolvimento com as curvas cônicas que nos chamou realmente a atenção. Escrever três obras com características distintas sobre um mesmo assunto é algo que por si só já chamaria atenção. A obra que traduzimos tem enfoque completamente diferente das obras de 1673 e 1685. Enquanto a definição bifocal é o elemento de partida da nossa obra de 1679, a divisão harmônica é o ponto de partida das outras duas. Enquanto a que traduzimos se restringe ao plano, as outras duas transitam entre o plano e o espaço. Coolidge cita (página 44 de [5]) que La Hire dominava todo o conhecimento sobre cônicas da época, que escreveu livros de fácil leitura, sua exposição foi superior a de Apolônio em [9] e que sua contribuição em projeção, secção harmônica, pólos e polares representou um avanço real na matemática (conteúdos presentes nas obras de 1673 e 1685).

## A RELEVÂNCIA HISTÓRICA DESSA OBRA DE 1679

A comparação entre o ensino das cônicas nos dias de hoje com este texto de La Hire reforçou a nossa desconfiança da sua importância histórica. A maior parte dos livros didáticos atuais obtém as equações analíticas das cônicas a partir da propriedade bifocal, utilizando fórmulas da geometria analítica de distância entre dois pontos (elipse e hipérbole) e de distância entre um ponto e uma reta (parábola). Apresentam as cônicas separadamente e no plano, sem ressaltar qual é o vínculo existente entre elas. Quase nenhuma propriedade das curvas é apresentada. As equações são a única caracterização explorada nos exercícios.

Observando o texto de La Hire – conforme foi mostrado no capítulo **6** (Descrição e Comentários) – a primeira proposição de cada cônica (demonstrada através de geometria sintética) pode dar origem, de forma imediata, às equações analíticas tão usuais nas salas de aula atualmente. Também apresenta as cônicas separadamente e exclusivamente no plano. Entretanto, uma grande diferença é que La Hire tem plena consciência da íntima vinculação entre elas, uma vez que as proposições para cada cônica são equivalentes às proposições das outras duas cônicas, conforme é mostrado na tabela de equivalências no capítulo **7** (Novas Proposições). As demonstrações, inclusive, são muito parecidas em diversas proposições.

No segundo livro dessa obra de 1679 ("Os Lugares Geométricos"), La Hire troca a linguagem sintética pela analítica. Ele fala de diversos lugares geométricos, entre eles as cônicas, através de equações. Conforme relatam Boyer, Chasles e Montucla (ver capítulo 2), esta forma de dividir uma obra em três livros de 1679 serviu de referência para outras obras que utilizaram a linguagem da geometria analítica e fizeram a apresentação das cônicas através da caracterização bifocal.

A comparação com o F. I. C. (obra de Gabriel Marie muito usada no século XX) que foi feita no capítulo 8 reforçou a nossa suspeita de vínculo entre o ensino atual e o texto de La Hire. Ele apresenta a mesma caracterização bifocal usada por La Hire e de um total de 86 proposições sobre cônicas presentes no F. I. C., 59 foram explicitados também por La Hire ou foram dadas pistas que o resultado era por ele conhecido. Contribuições de Poncelet, J. Serret, Mr. Courcelle, Dandelin são citadas pelo autor e mostram alguns novos conhecimentos que foram adicionados às seções cônicas ao longo dos cerca de 200 anos que separam as duas obras. Infelizmente, não sabemos exatamente quais foram as fontes do F. I. C.. Temos consciência da necessidade de uma maior investigação para estabelecer um vínculo preciso entre as duas obras.

Assim, ao término da nossa pesquisa, a desconfiança sobre a influência desse texto sobre o nosso ensino atual de cônicas só aumentou. A estruturação dessa obra em três partes (cônicas servindo de base para a exploração de equações analíticas, ou seja, a geometria sintética se transformando em geometria analítica), os comentários de Chasles e Boyer e a forma como é feita hoje a apresentação das cônicas constituem elementos concretos para permanecermos apontando na direção desta conjectura da possível relevância desse texto. Podemos, assim, formular uma continuação dessa pesquisa: o quanto este texto influenciou o ensino de cônicas desde o fim do século XVII até o nosso século XXI? De que forma isso teria acontecido? Quais os caminhos percorridos?

## O TEXTO DE LA HIRE COMO FONTE PARA O ENRIQUECIMENTO DA ABORDAGEM ATUAL REALIZADA NO ENSINO DE CÔNICAS

Apesar da semelhança entre elementos do texto de La Hire de 1679 e o ensino atual, no nosso ponto de vista, existe uma grande diferença existe entre ambos: o texto de La Hire é muito mais amplo que aquele que é ensinado atualmente sobre cônicas.

Estamos convencidos também que esse livro pode servir como fonte de consulta para aqueles professores que desejem ampliar e dar mais sentido ao ensino das seções cônicas. O texto consegue ser bem mais abrangente que o conteúdo ensinado atualmente, mas sua exposição é extremamente simples através de uma argumentação totalmente sintética. Partilhamos, assim, da opinião de Coolidge e do próprio La Hire (no seu prefácio) que a obra é acima de tudo acessível. Embora algumas demonstrações possam até serem longas, elas utilizam ferramentas usuais da geometria euclidiana usual: semelhança e congruência de triângulos, potência de ponto de um círculo, teorema de Pitágoras, além das próprias ferramentas do raciocício dedutivo do conhecimento matemático: as proposições anteriores e as definições. O uso freqüente das proporções, o que torna o texto tão próximo da linguagem dos gregos. A equivalência de polígonos é presença constante em várias demonstrações.

Podemos enumerar alguns motivos para justificar certa facilidade da compreensão deste livro sobre um assunto com uma fama de não ter imediata assimilação:

- Usa a definição bifocal, que é de fácil observação e viabiliza diversas construções contínuas já propostas por diversos autores (Kepler, Descartes, etc.);
- Não utiliza o cone em momento algum, pois é feita toda no plano. Portanto não exige a habilidade de visualização espacial;
- Estuda separadamente cada cônica;
- Sua argumentação usa a geometria euclidiana que é ensinada no ensino fundamental.

## SUGESTÕES DE ABORDAGENS PARA A SALA DE AULA

Conscientes da limitada atenção dada ao ensino de cônicas no nosso país, partimos para uma possível contribuição dessa dissertação. Algumas idéias presentes nesta obra sugerem possíveis ampliações de abordagem no ensino das cônicas. Tais propostas serão expostas a seguir:

- Efetuar algum tipo de ligação entre as três cônicas, por mais breve e simples que seja. Pode ser através do limite da equação da hipérbole (ou elipse) que vira a equação da parábola (ver proposição I de hipérbole no capítulo 6) ou pode ser através da visualização da seção de um cone por um plano. As três cônicas são descritas no terceiro ano do ensino médio, mas normalmente sem interligação.
- Apresentar uma propriedade com aplicação na ótica (proposição VIII de parábola, X de elipse e VII de hipérbole). Elas evidenciam a interligação e possuem uma demonstração trivial, além de enorme aplicação prática.
- Quando um aluno do nono ano do ensino fundamental for apresentado à função quadrática, a origem de sua equação pode ser justificada através da proposição I de parábola (ver capítulo 6).
- A origem dos nomes “elipse”, “parábola” e “hipérbole” pode ser discutida (proposição I de parábola, V de elipse e III de hipérbole), até porque esses termos também são usados no ensino do português para figuras de linguagem com as mesmas idéias de falta, igualdade e excesso.
- Por que não falar também do parâmetro para a elipse e para a hipérbole, uma vez que ele já aparece na equação analítica da parábola. O fato de o parâmetro ser, o que chamamos hoje, a corda focal mínima (entre todas as cordas que passam pelo centro, aquela que é perpendicular ao eixo é a menor delas) pode ser explorado. Esta exploração pode ser feita utilizando as equações analíticas usuais, fazendo $x = c$ (elipse e hipérbole) e $y = p / 4$ (parábola). A idéia de corda focal mínima vale para as três cônicas.
- O modelo de grandezas inversamente proporcionais é muito utilizado em diversos momentos do ensino de física, química e da própria matemática, mas a curva que ele produz não é normalmente explorada. A proposição XVII de hipérbole sugere uma justificativa para o fato de essa curva ser uma hipérbole (ver capítulo 6 da descrição).

Enfim, o texto é potencialmente mais amplo que a abordagem atual e muitas outras proposições dessa obra podem ser utilizadas para o ensino das curvas cônicas.

## A AMPLIAÇÃO DA OBRA

Outro objetivo que foi alcançado neste trabalho foi obtido pelo capítulo **7** desta dissertação. A obra foi ampliada e quase completada em relação às equivalências das proposições para as três cônicas. Ou seja, uma idéia verificada em uma das cônicas também está presente nas outras (exceto em algumas poucas propriedades que não fazem sentido na parábola, pois ela não possui eixo e diâmetro finitos). Foram feitas **8** novas proposições. Elas tiveram demonstrações idênticas às usadas por La Hire, exceto a primeira prova da proposição **19** de parábola. Ficaram faltando as analogias das proposições **VI, IX, XV, XVI** e **XVII** de parábola. No caso desta proposição **6,** embora não tenha sido provada, foi comentada a propriedade análoga sobre tangentes na conclusão do capítulo **6**.

## UM TEXTO NÃO-USUAL

A possibilidade de apresentar um texto não usual, abrangente e acessível sobre o assunto nos motivou a escrever este livro. Consegue ser amplo com suas **61** proposições, apesar de não utilizar as novas e importantes ferramentas surgidas justamente no início do século que esta obra foi escrita: as geometrias analítica e projetiva. Consegue ser didático, ao utilizar a ferramenta usual dos gregos. A necessidade de ser compreendido (a sua obra anterior de 1673 não foi tão bem recebida) fez La Hire escrever a presente obra com fins mais didáticos (ver prefácio). A beleza das diversas proposições, entre elas podemos citar a XX de elipse, XXIII de hipérbole e a XIX de parábola (apresentam o conceito de potência de um ponto em relação a uma cônica, resultando numa ampliação do conceito aplicado à circunferência), dão ao texto em questão o vigor que apenas obras relevantes possuem.

FIM

# REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

**[1]** BONGIOVANNI, V. – ***Les caractérisations des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue d'enseignants: étude d'une sequence d'activités et conception d'un hyperdocument interactif, These de Doctorat*** – Grenoble, 2001.

**[2]** BOYER, Carl B. – ***History of analitic geometry*** – Nova Iorque, 1956.

**[3]** BOYER, Carl B. – ***A history of mathematics***, *2ª edição* – Nova Iorque, 1979.

**[4]** CHASLES, Michel – ***Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*** – Bruxelas, 1837.

**[5]** COOLIDGE, Julian L. – ***A history of the conic sections and quadric sections*** – Nova Iorque, 1945.

**[6]** DE LA HIRE, P. – ***Nouveaux éléments des sections coniques, les lieux géométriques, la construction ou effectuation des equations*** – Paris, 1679.

**[7]** DE LA HIRE, P. – Tradução de [6] para o inglês de Brian Robinson – ***New elements of conic sections together with a method for their description on a plane*** – Londres, 1723.

**[8]** DE LA HIRE, P. – ***Nouvelle methode en geometrie pour les sections des superfícies coniques et cylindriques qui ont pour bases des circles, ou des paraboles, des elipses, & des hyperboles*** – Paris, 1673.

**[9]** DE LA HIRE, P. – ***Sectiones conicae in novem libros distributae* – Tradução de Jean Peyroux – *Grand livre des sections coniques*** – Paris, 1685

**[10]** F. I. C. – ***Elementos de geometria***, *14ª edição* – Rio de Janeiro, 1954.

**[11]** ESCOLA POLYTECHNICA – ***Programma para o exame de algebra, geometria, trigonometria rectilinea, e algebra superior***, editado pela Imprensa Nacional – Rio de Janeiro, 1907.

**[12]** FONTENELLE, Bernard de – ***Eloge des academiciens avec l´histoire de l'academie royale des sciences*** – Paris, 1699.

**[13]** LESBEGUE, Henri – ***Les Coniques*** – Paris, 1942.

**[14]** L'HOPITAL, Marquis de – Tradução para o inglês de E. Stone – ***An analytick treatise of conick sections, and their use for resolving of equations in determinate and indeterminate problems*** – Londres, 1723.

**[15]** MONTUCLA, J. F. – ***Histoire des mathématiques***, 4 volumes, editado em 1802 – Paris, 1752.

# APÊNDICE – A

## RESUMO DAS DEFINIÇÕES E PROPOSIÇÕES DO TEXTO DE PHILIPPE DE LA HIRE DE 1679

## PARÁBOLA

***Lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de um ponto dado (F) e uma rata dada (AD)***

**Definição 1 -** O conjunto de pontos P eqüidistantes do ponto F e da reta AD formam uma curva denominada ***"Parábola".***

**Definição 2 -** O ponto F **é** chamado ***"Foco"*** da parábola.

**Definição 3 -** A reta DFO é denominada ***"Eixo"*** da parábola.

**Definição 4 -** O segmento PO desenhado através de um ponto qualquer P da parábola e perpendicular ao eixo de simetria é chamado ***"Ordenada"*** do ponto P da parábola.

**Definição 5 -** Toda semi-reta que tem origem num ponto qualquer P da parábola, sendo paralela ao eixo de simetria e que não cruza AD é denominada ***"Diâmetro"*** do ponto P.

**Definição 6 -** Uma reta que encontra a parábola em apenas um único ponto e que passa exclusivamente pelo seu exterior é chamada reta ***"Tangente"*** à parábola no referido ponto.

**PROPOSIÇÃO 1** – **$PO^2 = 2FD \cdot TO$**.

**Corolário 1** - O segmento ***2FD*** é invariante, qualquer que seja o ponto ***P*** da parábola.

**Definição 7** - O segmento **2FD** é denominado ***"Parâmetro da parábola".***

**Corolário 2** – **FT = *¼*** do parâmetro.

**Corolário 3** - $\frac{PO^2}{P'O'^2} = \frac{TO}{TO'} \rightarrow \frac{x^2}{x'^2} = \frac{y}{y'} = 2FD$

**PROPOSIÇÃO 2** - A reta ***TS*** // à diretriz ***AD*** e que passa pelo vértice ***T*** é tangente à parábola.

**PROPOSIÇÃO 3** - Qualquer diâmetro encontra a parábola em um único ponto ***P***.

**PROPOSIÇÃO 4** - A mediatriz ***PE*** do segmento ***FA*** é tangente à parábola em ***P***.

**Corolário** - Os ângulos ***FGE***, ***FAD***, ***APE*** e ***FPE*** são iguais. Os triângulos ***FAP*** e ***PFG*** são isósceles.

**PROPOSIÇÃO 5** - A reta tangente que passa pelo ponto ***P*** da parábola é única.

**Corolário** - Uma tangente sempre cruza o eixo, todos os diâmetros e todas as outras tangentes.

**PROPOSIÇÃO 6** - Dado um ângulo que não exceda um reto, é sempre possível achar uma tangente por **P** que forme com o eixo um ângulo **PGF** menor que o primeiro.

**PROPOSIÇÃO 7** - O segmento ***TG*** é igual ao segmento ***TO*** do ponto ***P***.

**Corolário** – Os segmentos ***PS*** e ***PI*** são congruentes.

**PROPOSIÇÃO 8** - O ângulo ***IPL*** é congruente ao ângulo ***FPG***.

**Corolário** - O ângulo ***LPF*** é congruente ao ***GPI***.

**PROPOSIÇÃO 9** – Sendo ***PM*** a normal à tangente, o segmento ***OM*** é ½ do parâmetro do eixo.

**PROPOSIÇÃO 10** - O triângulo ***TAH*** é congruente ao triângulo ***BAP***.

**Corolário** – São equivalentes ***TDB*** e o paralelogramo ***TDPH***, assim como o retângulo ***TOPB*** e ***POH***.

**PROPOSIÇÃO 11** – São equivalentes o triângulo ***EGM*** e o retângulo ***GTBF*** **(egM** e **TgfB)**.

**PROPOSIÇÃO 12** - As áreas dos triângulos ***EFI*** e **efI** são iguais a do paralelogramo ***PIMH***.

**PROPOSIÇÃO 13** – *Se pelo ponto **E** da parábola for traçada uma reta paralela à **PH**, então esta reta encontrará a parábola em outro ponto **e**, com **EI = Ie**.*

**Definição 8** - O segmento EI é chamado ***“Ordenada de um diâmetro PI”***.

**PROPOSIÇÃO 14** - Os quadrados das ordenadas como ***EI*** e ***KY*** de um mesmo diâmetro como ***PI***, estão um para o outro assim como as partes deste diâmetro ***PI*** e ***PK***, respectivamente.

**Definição 9** - O ***“Parâmetro p de um diâmetro”*** é **igual a** $EI^2 / PI$. **Corolário** – $EI^2 = \mathbf{p} \cdot PI$.

**PROPOSIÇÃO 15** – ***P*** é o ponto médio do segmento ***IQ***, ou seja, ***PQ*** = ***PI***.

**PROPOSIÇÃO 16** - O parâmetro do diâmetro ***PI*** excede o parâmetro do eixo ***TF*** em $4 \cdot TO$.

**Corolário** - Quanto mais distante estiver um diâmetro do eixo maior será o seu parâmetro.

**PROPOSIÇÃO 17** - O segmento ***PF*** é ***¼*** do parâmetro do diâmetro ***PI***.

# ELIPSE

***Lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos dados (F e D) é constante e igual a IT.***

**Definição 1** – A curva IMPTN é denominada **"Elipse"**.

**Definição 2** – O ponto C é o **"Centro"** da elipse.

**Definição 3** – O segmento IT é o **"Grande Eixo"**.

**Definição 4** – Os pontos F e D são chamados **"Focos"**.

**Definição 5** – O segmento NCM perpendicular a IT limitado pela elipse é o **"Pequeno Eixo"**.

**Definição 6** – O segmento perpendicular PO que une a elipse ao eixo é a **"Ordenada"** do Eixo.

**Definição 7** – O segmento que passa por C, limitado pela elipse, é chamado **"Diâmetro"**.

**Definição 8** – Uma reta que cruza a elipse em apenas um ponto é a chamada reta **"Tangente"**.

**LEMA 1** – Num triângulo retângulo $FOP$, $PH\ (FP + FO) \cdot PM\ (FP - FO) = PO^2$.

**PROPOSIÇÃO 1** – Se ***PO*** é uma ordenada de ***IT***, então: $PO^2 / IO \cdot OT = IF \cdot FT / CT^2$.

**PROPOSIÇÃO 2** – $IF \cdot FT = CM^2$.

**PROPOSIÇÃO 3** – Sendo ***PO*** uma ordenada de ***IT***, então $PO^2 / IO \cdot OT = NM^2 / IT^2$.

**PROPOSIÇÃO 4** – Se ***PQ*** é uma ordenada de ***NM***, logo $PQ^2 / NQ \cdot QM = IT^2 / NM^2$.

**Definição 9** – ***"Parâmetro do Eixo"*** *é a razão entre o quadrado do outro eixo e este eixo.*

**Definição 10** – *A* ***"Figura do Eixo"*** *é um retângulo cujos lados são o próprio eixo e seu parâmetro.*

**Corolário -** *O quadrado de um dos eixos é igual à figura do outro eixo.*

**PROPOSIÇÃO 5** – *O quadrado de lado* ***PO*** *é equivalente ao retângulo* ***TO*** *e* ***OV****.*

**PROPOSIÇÃO 6** – *Um diâmetro* ***PR*** *qualquer é dividido ao meio pelo centro* ***C****.*

**PROPOSIÇÃO 7** – *A reta perpendicular ao eixo maior por* ***I*** *ou* ***T*** *é tangente à elipse.*

**PROPOSIÇÃO 8** – *Sendo* ***DE = EA****, a reta* ***PE*** *tangenciará a elipse em* ***P.***

**PROPOSIÇÃO 9** – *Por um ponto* ***P*** *de uma elipse só existe uma única reta* *tangente.*

**PROPOSIÇÃO 10** – *O ângulo **FPJ** é igual ao **DPH**.*

**Corolário -** *O ângulo **HPF** = **JPD**.*

**PROPOSIÇÃO 11** – *Se a tangente **PE** cruza o eixo **IT** em **H**: **CO** **:** **CT** **::** **CT** **:**CH.*

**Corolário 1 –** *Sendo **FK = KA**, **KA** é a média geométrica entre **KP** e **KV**.*

**Corolário 2 –** *Os pontos **I, O, T** e **H** formam uma divisão harmônica: **IO** . HT = OT . IH.*

**PROPOSIÇÃO 12** – *Se a tangente **PE** cruza o eixo **NM** em **V**: **CQ : CM :: CM : CV**.*

**PROPOSIÇÃO 13** – *Os triângulos **PAB** e **TAH** são equivalentes.*

**Corolário 1** – *São equivalentes os polígonos **PDT** e **POT, CTB** e **CPH, POTB** e **PDTH, POH e DTB.***

**Corolário 2** – *São equivalentes os polígonos **CIb** e **CPH, Pab** e **IaH** e **Rh** é paralela à **PH**.*

**LEMA 2** – *O retângulo **IOT** **:** retângulo **IGT** **::** trapézio **POTB** **:** trapézio **FGTB**.*

**PROPOSIÇÃO 14** – *O triângulo **EGM** é equivalente ao quadrilátero **GTBF**.*

**PROPOSIÇÃO 15** – *O triângulo **ELF** é equivalente ao quadrilátero **LPHM**.*

**PROPOSIÇÃO 16** – *O diâmetro **RP** divide igualmente o segmento **Ee (// PH)** em **L**.*

**PROPOSIÇÃO 17** – *Seja **VCS // PH**, então **VS2** **:** **RP2** **::** **EL2** **:** **RL , LP**.*

**PROPOSIÇÃO 18** – *Se **Ee // RP**, então **EO = eO** e **RP2** **:** **VS2** **::** **EO2** **:** retângulo **VOS**.*

**Corolário –** *A reta **SX**, paralela à **EO,** tangencia a elipse no ponto **S.***

**Definição 11 –** *Os diâmetros RP e VS são chamados **"Diâmetros Conjugados"** um do outro.*

**Defini** Os diâmetros RP e VS são chamados **"*Diâmetros Conjugados*"** um do outro.

**Definição 12 –** O segmento EL (// VS) é uma ***"Ordenada"*** de *RP* e EO é ***"Ordenada"*** de VS.

**Definição 13 –** ***"O Parâmetro PM do diâmetro RP"*** é igual a $VS^2$ / RP.

**Definição 14 –** O retângulo de lados o diâmetro RP e seu parâmetro PM é a ***"Figura de RP".***

**PROPOSIÇÃO 19** – O quadrado de lado ***EL*** é equivalente ao retângulo ***PN***.

**PROPOSIÇÃO 20** – O retângulo ***HRI*** **:** retângulo ***FRG*** **::** $RP^2$ **:** $VS^2$.

# HIPÉRBOLE

***Lugar geométrico dos pontos P cuja diferença das distâncias a dois pontos dados (F e D) é constante e igual a IT.***

**Definição 1** – A curva que passa por pPT e P'IP'' é denominada ***"Hipérbole"***.

**Definição 2** – O ponto C é o ***"Centro"*** da hipérbole.

**Definição 3** – O segmento IT é o ***"Eixo Determinado"***.

**Definição 4** – A reta CM perpendicular a IT por C é chamada ***"Eixo Indeterminado"***.

**Definição 5** – Os pontos F e D são os ***"Focos"***.

**Definição 6** – O segmento PO $\perp$ IT é a ***"Ordenada"*** de IT**.**

**Definição 7** – As retas que passam pelo centro C são chamadas ***"Diâmetros"***. As que encontram a hipérbole (PP'') são os ***"Determinados"*** e os que não (CM), são os ***"Indeterminados"***.

**Definição 8** – Uma reta de pontos exteriores exceto um, que cruza a hipérbole, é a reta **"Tangente"**.

> **PROPOSIÇÃO 1** – $\mathbf{PO^2/ IO \cdot OT = IF \cdot FT / CT^2}$. **Corolário:** $\mathbf{PO^2/ IO \cdot OT = PO'^2/ IO' \cdot O'T}$.
>
> **PROPOSIÇÃO 2** – O A reta ***PP'*** (// ao eixo ***IT***) cruza o eixo ***CM***, então ***PM = MP'***.

**Definição 9 –** O segmento TV = 4 · ID · DT / IT é chamado o ***"Parâmetro"*** do eixo IT.

**Definição 10 –** O retângulo IV de lados IT e TV é chamado de ***"Figura"*** do eixo IT.

**Corolário –** A *Figura* ***IV*** é igual a **4** vezes o retângulo ***ID · DT***.

> **PROPOSIÇÃO 3 –** $PO^2 = OT \cdot TX$.
>
> **PROPOSIÇÃO 4 –** Qualquer diâmetro, como ***Pp'***, é dividido ao meio em ***C***.
>
> **PROPOSIÇÃO 5 –** A reta perpendicular ao eixo **IT** por **T** é tangente à hipérbole.
>
> **PROPOSIÇÃO 6 –** A reta mediatriz ao segmento **DA** é tangente à hipérbole em **P.**
>
> **PROPOSIÇÃO 7 –** Os ângulos ***FPE*** e ***DPE*** são congruentes.
>
> **PROPOSIÇÃO 8 –** Existe apenas uma reta ***PH*** que tangencia a hipérbole em ***P***.

**Definição 11 –** Seja aT = TA $\perp$ a IT e $AT^2 = ID \cdot DT$. As retas CA e Ca são as ***"Assíntotas"***.

**Corolário –** As assíntotas de um ramo da hipérbole são também assíntotas do outro ramo.

> **PROPOSIÇÃO 9 –** O retângulo ***GPB*** é equivalente ao quadrado de lado ***AT***.
>
> **PROPOSIÇÃO 10 –** O retângulo ***gPb*** é equivalente ao quadrado de lado ***CT***.

**PROPOSIÇÃO 11 –** A hipérbole e suas assíntotas se aproximam continuamente quanto mais forem prolongadas e não se encontrarão, pois ***PB*** pode ser feita menor que uma quantidade dada.

**PROPOSIÇÃO 12 –** Se ***PH // AB*** e ***PF*** // ***AD***, então ***PH · PF*** = ***AD · AB***.

**PROPOSIÇÃO 13 –** Os segmentos de uma mesma reta ***PF*** e ***AD*** formados entre as assíntotas e a hipérbole são congruentes.

**PROPOSIÇÃO 14 –** A tangente ***FH*** por **P** cruza as assíntotas em ***F*** e ***H*** e ***FP = PH***.

**PROPOSIÇÃO 15 –** Sendo **FH // BD // B'D'**, então ***PF · PH = AB · AD = A'B'***$^2$.

**PROPOSIÇÃO 16 –** O retângulo de lados ***PF*** e ***PH*** é equivalente ao quadrado $AC^2$.

**PROPOSIÇÃO 17 –** Os paralelogramos ***BADC*** e ***FPHC*** são equivalentes.

**PROPOSIÇÃO 18 –** Os triângulos ***GCE*** e ***KCI*** são equivalentes.

**PROPOSIÇÃO 19 –** Se ***DG // KM // tangente AB***, então ***LH = HI*** e ***PN = NE.***

**PROPOSIÇÃO 20 –** O diâmetro ***CT*** divide ao meio os segmentos ***PV*** em ***R*** e ***qs*** em ***r***.

**Definição 12 –** Os diâmetros OT e XR são chamados ***"Conjugados"***.

**Definição 13 –** O segmento EN é a **"Ordenada do diâmetro OT"** e VR é a **"Ordenada de XC".**

**PROPOSIÇÃO 21 –** Sendo ***EN*** uma ordenada de **OT*:*** $EN^2 : ON \cdot NT :: AT^2 : CT^2$.

**Corolário –** $EN^2$ : retângulo $ON \cdot TN :: IH^2$ : retângulo $OH \cdot TH$.

**Definição 14** – O segmento PT = $aTA^2 / OT$ é chamado o ***"Parâmetro"*** do diâmetro OT.

**Definição 15** – O retângulo de lados OT e seu parâmetro PT é a ***"Figura"*** do diâmetro OT.

**PROPOSIÇÃO 22 –** O quadrado de lado ***EN*** é equivalente ao retângulo ***TN · NM***.

**Corolário –** Se o diâmetro ***OT*** é igual ao seu parâmetro ***PT***, então as assíntotas são perpendiculares e todos os diâmetros e os respectivos parâmetros serão iguais.

**PROPOSIÇÃO 23 –** O retângulo ***HR · RI*** : retângulo ***FR . RG :: PT : OT***.

**PROPOSIÇÃO 24 – CH : CT :: CT : CO.**

**Corolário –** ***IO : OT :: IH : HT***.

# APÊNDICE - B

## RESUMO DAS PROPOSIÇÕES DO F.I.C

| F. I. C. | Descrição e ferramentas usadas na demonstração |
|---|---|
| | **ELIPSE** |
| 613 | 5 definições: Elipse, Raios Vetores, Distância Focal, Círculo Diretor e Principal. |
| 614 | Construção pelo modo contínuo. 613 |
| 615 | Construção por pontos mais 4 observações. 613 |
| 616 | Número de interseções de uma reta com a elipse: curva convexa.<br>Uma certa construção, 613 e a proposição 36. |
| 617 | Ponto exterior e ponto interior à elipse<br>Uma certa construção, 613 e a definição prévia de curva convexa. |
| 618 | Posições de um ponto em relação a uma elipse. 617 |
| 619 | Duas simetrias axiais e uma central.<br>Paralelismo, congruência de polígonos, 613 e propriedade do paralelogramo. |
| 620 | Definição de excentricidade, número de vértices, achar focos dados a e b e relação Pitagórica entre a, b e c. |
| 621 | Congruência de ângulos entre a tangente e raios vetores.<br>Uma construção, ponto interior, 613, Congruência de triângulos e limite. |
| 622 | Pontos exteriores da tangente e normal como bissetriz<br>613, 621 e desigualdade triangular, ângulos complementares e O. P. V. |
| 623 | Simetrias e perpendicularidade. 621 e 622. |
| 624 | Obtenção do círculo diretor.<br>Construção da 621 (limite) e definição de elipse |
| 625 | Nova definição de elipse e possíveis interseções entre 2 Círculos. Novo traçado da elipse por pontos. 624 |
| 626 | Obtenção do círculo principal. Semelhança de triângulos e 624 |

| | |
|---|---|
| 627 | Problema de traçar uma tangente por um ponto na curva. 621 |
| 628 | Problema de traçar uma normal por um ponto na curva. 622 |
| 629 | Problema de traçar as tangentes por um ponto fora da curva. 625 e 623 |
| 630 | Escólio sobre a quantidade possível de tangentes. 625 e 629 |
| 631 | Problema de traçar uma tangente paralela a uma reta dada. Paralelismo, 623 |
| 632 | O diâmetro que une tangentes paralelas passa pelo centro. Construção da 629, triângulos isósceles e propriedade do paralelogramo. |
| 633 | Ângulos entre duas tangentes e os dois Focos. 613, 623 e congruência de triângulos. |
| 634 | Projeção do círculo sobre um plano.<br>Paralelismo, 613 (definição de elipse), áreas e semelhança de triângulos. |
| 635 | Razão entre as ordenadas do círculo diretor e elipse. 634 e semelhança. |
| 636 | Escólios da razão b / a. Semelhança de triângulos e 635. |
| 637 | Área da elipse. 634, 635 e limite. |
| 638 | Corolários. 637. |
| 639 | Interseção de reta com elipse dados a e b. Paralelismo e semelhança. |
| 640 | Interseção de reta com a elipse dados a e os Focos. “Potencia de Ponto” |
| 641 | Compasso elíptico. Paralelismo e semelhança de triângulos |
| **F. I. C.** | **HIPÉRBOLE** |
| 642 | 5 definições: Elipse, Raios Vetores, Distância Focal, Círculo Diretor e Principal. |
| 643 | Construção pelo modo contínuo. 642 |
| 644 | Construção por pontos. 642 |
| 645 | 4 observações sobre a proposição. 642 e 644 |
| 646 | Número de interseções de uma reta com a hipérbole: curva convexa. |

| | |
|---|---|
| 647 | Ponto exterior e ponto interior à hipérbole<br>Uma certa construção, 642 e a desigualdade triangular. |
| 648 | Posições de um ponto em relação a uma hipérbole. 647 |
| 649 | Duas simetrias axiais e uma central<br>Paralelismo, 642, congruência de polígonos e propriedade do paralelogramo. |
| 650 | Definição de excentricidade e de eixos, achar b dados a e c e relação<br>Pitagórica entre a, b e c. Paralelismo. |
| 651 | Número de vértices e hipérbole eqüilátera |
| 652 | Congruência de ângulos entre a tangente e raios vetores.<br>Uma construção, 642, ponto interior, congruência de triângulos e limite. |
| 653 | Pontos exteriores da tangente e normal como bissetriz<br>642, 652 e desigualdade triangular, ângulos complementares e O. P. V. |
| 654 | Simetrias e perpendicularidade. 652 e 653. |
| 655 | Obtenção do círculo diretor.<br>642, construção da 652 (limite) e definição de hipérbole. |
| 656 | Nova definição de hipérbole e possíveis interseções entre 2 círculos.<br>Novo traçado da hipérbole por pontos. 655. |
| 657 | Definição de assíntota. |
| 658 | Número de assíntotas e sua interseção. Paralelismo, construção, 654 e 657. |
| 659 | Os eixos são bissetrizes das assíntotas. 658. |
| 660 | Associação entre a, b e a assíntota. Paralelismo, 650 e 658. |
| 661 | Distância entre o foco e a assíntota e sua possível perpendicularidade. 651 e 660. |
| 662 | Obtenção do círculo principal. Semelhança de triângulos e 655. |
| 663 | Escólios. 658, 661 e 662. |
| 664 | Problema de traçar uma tangente por um ponto na curva. 652. |
| 665 | Problema de traçar as tangentes por um ponto fora da curva. 654 e 656. |
| 666 | Quantidade possível de tangentes. 656 e 665. |

| | |
|---|---|
| 667 | Tangentes por ponto fora: ramos iguais ou diferentes da hipérbole. 664. |
| 668 | Problema de traçar uma tangente paralela a uma reta dada. Paralelismo, 654. |
| 669 | Condição para a construção anterior. 664. |
| 670 | O diâmetro que une tangentes paralelas passa pelo centro. Paralelismo, construção da 665, triângulo isósceles e prop. do paralelogramo. |
| 671 | Área do segmento hiperbólico. |
| **F. I. C.** | **PARÁBOLA** |
| 672 | 4 definições: Parábola, Foco, Diretriz e Parâmetro. |
| 673 | Construção pelo modo contínuo. 672. |
| 674 | Construção por pontos. 672, paralelismo. |
| 675 | Observações. 672 e 674. |
| 676 | Observações. 673. |
| 677 | Ponto exterior e ponto interior à elipse<br>Uma certa construção e a desigualdade triangular. |
| 678 | Posições de um ponto em relação a uma parábola. 672 e 677 |
| 679 | Simetria axial.<br>Paralelismo, congruência de triângulos, 608, 672 e 678. |
| 680 | Número de vértices e centro. 679 |
| 681 | Parábola como limite da elipse. Limite |
| 682 | Parábola é uma curva convexa. 681 |
| 683 | Congruência de ângulos entre a tangente e raios vetores.<br>Uma construção, 672, ponto interior, congruência de triângulos e limite. |
| 684 | Pontos exteriores da tangente e simetria<br>672, 683, paralelismo, desig. triangular, âng. complementares e O. P. V. |
| 685 | Simetria, normal como bissetriz e perpendicularidade.<br>Paralelismo, 683 e 684. |
| 686 | Obtenção da reta diretriz.<br>Paralelismo, 672, 684 e 685 |
| 687 | Possíveis interseções entre um círculo e uma reta. Novo traçado da parábola por pontos. Paralelismo, 685 e 693 |

| | |
|---|---|
| 688 | Obtenção da tangente pelo vértice. Semelhança de triângulos, 685 e 686. |
| 689 | 2 definições: Subtangente e Subnormal. |
| 690 | Propriedades da subtangente e subnormal. Paralelismo, 685 e 672 |
| 691 | Equação da parábola. Propriedade métrica do triângulo retângulo e 690 |
| 692 | Relação entre ordenadas e abscissas. 691 |
| 693 | Problema de traçar uma tangente por um ponto na curva. 683, 684, 685 e 690 |
| 694 | Problema de traçar as tangentes por um ponto fora da curva. 684 |
| 695 | Problema de traçar uma tangente paralela a uma reta dada. Paralelismo, 684 |
| 696 | Propriedade entre duas tangentes e uma corda.<br>Uma certa construção, 672, 684 e o Teorema de Tales |
| 697 | Projeções das tangentes sobre a diretriz e paralelismo. Paralelismo e 696 |
| 698 | Área da parábola. 690, 696, áreas e limite |

# APÊNDICE – C

## ANALOGIA ENTRE AS PROPOSIÇÕES DO F. I. C.

| Proposição | Elipse | Hipérbole | Parábola |
|---|---|---|---|
| Definições iniciais | 613 | 642 | 672 |
| Traçado pelo modo contínuo e escólio | 614 | 643 | 673 e 676 |
| Traçado por pontos e observações | 615 | 644 e 645 | 674 e 675 |
| Curva convexa | 616 | 646 | 682 |
| Ponto interior e exterior | 617 e 618 | 647 e 648 | 677 e 678 |
| Eixos e centro de simetria | 619 | 649 | 679 e 680 |
| Excentricidade, vértices e relação Pitagórica | 620 | 650 e 651 | 680 |
| Ângulos entre tangente e raios vetores. | 621 | 652 | 683 |
| Pontos exteriores da tangente e sua normal | 622 | 653 | 684 e 685 |
| Simetrias e perpendicularidade | 623 | 654 | 684 e 685 |
| Círculo diretor | 624 | 655 | 686 |
| Novo traçado por pontos | 625 | 656 | 687 |
| Círculo principal | 626 | 662 | 688 |
| Traçado da tangente: ponto na curva. | 627 | 664 | 693 |
| Traçado da normal: ponto na curva. | 628 | Não fez | 693 |
| Traçado das tangentes: ponto fora da curva. | 629 | 665 e 667 | 694 |
| Quantidade possível de tangentes. | 630 | 666 | Não fez |
| Traçado das tangentes paralelas a uma reta. | 631 | 668 e 669 | 695 |
| Escólios das tangentes paralelas | 632 | 670 | Não fez |
| Ângulos entre duas tangentes e os dois focos. | 633 | Não fez | Não fez |
| Projeção do círculo sobre um plano. | 634 | Não fez | Não fez |
| Razão entre as ordenadas. | 635 | Não fez | Não fez |
| Escólios da razão b / a. | 636 | Não fez | Não fez |
| Área | 637e 638 | 671 | 696, 697 e 698 |
| Interseção de reta com a cônica | 639 e 640 | Não fez | Não fez |
| Novo traçado pelo modo contínuo | 641 | Não fez | Não fez |
| Assíntotas da hipérbole | 657, 658, 659, 660, 661, 663 | | |
| Projeções sobre o eixo e a Equação | 689, 690, 691 e 692 | | |

# APÊNDICE – D

## OBRAS DE PHILIPPE DE LA HIRE

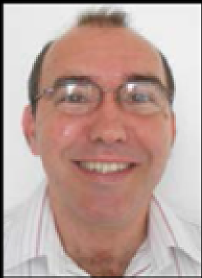
- "Nouvelle Méthode em Géométrie pour les Sections des Superfícies Coniques et Cylindriques qui ont pour Bases des Circles, ou des Paraboles, des Elipses, & des Hyperboles" – Paris, 1673.
- "Nouveaux Éléments des Sections Coniques, Les Lieux Géométriques, La Construction ou Effectuation des Équations" – Paris, 1679.
- "La Gnomonique ou l'Art de faire des Cadrans au Soleil" – Paris, 1682.
- "Sectiones Conicae in Novem Libros Distributae" – Tradução de Jean Peyroux – "Grand Livre des Sections Coniques" – Paris, 1685.
- "École des Arpenteurs" ou "Escola de Agrimensores" – 1689.
- "Tables du Soleil et de la Lune" – 1689.
- "Memoires sur les Épicicloides" – Paris, 1692.
- Tratado sobre os Efeitos do Gelo e do Frio – 1692.
- "Traité de Mecanique: ou l'on explique tout ce qui est nécessaire dans lê pratique des arts, & les propriétés des corps pesant lesquelles ont um plus grand usage dans la physique" – 1692.
- Tratado sobre Diferenças entre os Sons da Corda de uma Trombeta Marinha – 1693.
- Tratado sobre os Diferentes Acidentes da Visão – 1693.
- "Traité de Roulettes" – 1702.
- "Tabula Astronomica Ludovici Magni Jussu et Munificentia Exaratae" – Paris, 1702.
- "Planisphère Celeste" – 1705.
- "Memoires sur les Conchoïdes" – Paris, 1708.
- *Fontes*: Fontenelle [12], Michel Chasles [4], Wikipédia.

IFRN
Editora

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte iniciou em 1985 suas atividades editoriais com a publicação da Revista da ETFRN, que a partir de 1999 se transformou na Revista Holos, em formato impresso e, posteriormente, eletrônico. Em 2004, foi criada a Diretoria de Pesquisa que fundou, em 2005, a editora do IFRN. A publicação dos primeiros livros da Instituição foi resultado de pesquisas dos professores para auxiliar os estudantes nas diversas disciplinas e cursos.

Buscando consolidar uma política editorial cuja qualidade é prioridade, a Editora do IFRN, na sua função de difusora do conhecimento já contabiliza várias publicações em diversas áreas temáticas.

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO NORTE



Natural de Aracaju - SE, estudou até os 17 anos na sua cidade natal quando tomou a decisão de estudar no Rio de Janeiro. Lá, formou-se em engenharia mecânica pela UFRJ. Iniciou o mestrado no PEM (Programa de Engenharia Mecânica) da COPPE (UFRJ) em 1995, mas não finalizou e decidiu mudar de área. Passou a atuar como professor particular de matemática, física e química. No ano de 2001, iniciou a licenciatura em matemática na UERJ, sendo finalizada em 2004. Foi quando conheceu o Professor Geraldo Magela que despertou o seu fascínio pela geometria e o professor José Antônio Novaes que apresentou o envolvente mundo das dobraduras. Em seguida, surgiu o convite para a primeira experiência em sala de aula no Colégio de Aplicação da UERJ. A intimidade com a carreira de professor se ampliou a ponto de influenciar decisivamente no passo seguinte: o curso de mestrado no recém-inaugurado programa em ensino de matemática da UFRJ (2006). A vontade de atuar como professor de matemática só fez aumentar durante o mestrado após o contato com duas áreas: a história da matemática apresentada magistralmente pela professora Tatiana Roque e a geometria dinâmica através do eminente professor Luiz Carlos Guimarães. Daí começou a parceria com o professor Luiz que o orientou numa dissertação de mestrado e que produziu este livro. Em 2009, veio para o Rio Grande do Norte e passou a ensinar no IFRN (câmpus João Câmara). Trabalhando nessa instituição há 4 anos, ensina as disciplinas de matemática e desenho para ensino médio e superior. É fundador e participa de dois projetos de extensão: um que ensina a nobre arte do xadrez e outro que estimula a participação em olimpíadas de matemática. Este último produziu premiações nas edições 2011/2012/2013 da OBMEP. Participa atualmente do Projeto Espaço do Conhecimento destinado a professores da rede municipal dos municípios de Mossoró e Pendências (RN).

Natal, 2013

A ausência de outras visões sobre um assunto pode resultar numa incapacidade do professor em justificar a sua importância. O ensino atual de cônicas no Brasil possui uma abordagem normalmente limitada ao universo da geometria analítica. Além disso, pouca atenção é dada às propriedades dessas curvas. No passado, as cônicas já foram estudadas de forma mais aprofundada nos cursos regulares. Este trabalho apresenta o texto: "Novos Elementos das Seções Cônicas" de Philippe de La Hire (1679). Pela primeira vez, foi traduzido para o português. A obra possui um enfoque baseado na matemática grega, utilizando apenas geometria euclidiana. Define as cônicas através da propriedade bifocal com enfoque exclusivamente plano e apresenta 61 proposições. Este livro contém um resumo da história das cônicas e uma biografia sobre Philippe de La Hire. Além de traduzida, a obra foi descrita, comentada e complementada. Foi feita ainda uma comparação com um livro didático relevante do século XX (F. I. C.). Buscamos oferecer um material não usual sobre cônicas que permita ao professor uma ampliação das formas de abordagem de um assunto historicamente tão importante. Ficará mais fácil justificar por que estas curvas têm aplicação na astronomia, na ótica, no desenho projetivo, na acústica, na engenharia e em tantos outros campos.

ISBN 978-85-8333-011-0
9 788583 330110 >

IFRN Editora
ifuncem
ABEU ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS